UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PISA
FACOLTÁ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea:

Confronto tra sistemi di controllo per velivoli FBW progettati con tecniche classiche e moderne

Relatori:
Prof. Eugenio Denti
Prof. Giovanni Mengali
Dott. Ing. Felice Felippone

Candidato:
Sergio Brugnano

ANNO ACCADEMICO 2012 – 2013

Indice

Sommario

L'attività di tesi è stata svolta nell'ambito di uno stage presso il Dipartimento: "Flight Technology" della "Piaggio Aero Industries".
Oggetto della tesi è verificare se, per il progetto dei sistemi di controllo di velivoli FBW (Fly By Wire), l'approccio mediante la moderna teoria del controllo rispetto alle tecniche tradizionali, offra effettivi vantaggi in termini di risultati e velocità di sviluppo.
Per valutare tali aspetti è stata eseguita la sintesi di un sistema di controllo C.A.S. (Control Augmentation System) utilizzando una metodologia agli stati e sono stati confrontati i risultati con quelli ottenuti mediante l'approccio classico.
Allo scopo, l'azienda ha fornito il modello in variabili di stato della dinamica linearizzata longitudinale di un velivolo FBW. Ha fornito inoltre: lo schema del FCS (Flight Control System) longitudinale, i modelli dei sensori e del sistema di attuazione nonchè le specifiche di prestazione da rispettare.
Nella prima parte del lavoro sono stati approfonditi gli aspetti teorici legati alla moderna teoria del controllo. In particolar modo sono stati trattati i problemi di assegnazione dell'autostruttura, della regolazione lineare quadratica con retroazione dello stato o delle uscite (LQR/LQROF) e l'ottimizzazione LQ ad inseguimento con retroazione delle uscite (LQTOF).
Nella seconda parte è stata focalizzata l'attenzione sulla sintesi del Control Augmentation System secondo le specifiche fornite dalla "Piaggio Aero Industries". Per la soluzione del problema è stata adottata la tecnica di ottimizzazione LQTOF, realizzando allo scopo una procedura iterativa per il calcolo dei guadagni di chiusura delle retroazioni del sistema. È stato condotto un esempio di scheduling dei guadagni al variare del Mach di volo, verificando i requisiti di robustezza del sistema.
L'algoritmo di calcolo, il modello del FCS e le simulazioni sono state realizzati in ambiente Matlab- Simulink®.

Introduzione

L'introduzione dei sistemi di controllo di tipo Fly-By-Wire (FBW) e l'impiego di computer di bordo sul velivolo Airbus A320 hanno segnato l'inizio di una nuova era per l'aviazione civile, migliorando aspetti inerenti alla sicurezza e alle qualità di volo, e riducendo considerevolmente il carico di lavoro del pilota. I vantaggi offerti dai sistemi FBW presuppongono la possibilità di retroazionare dei parametri di controllo, in modo da modulare costantemente la deflessione delle varie superfici in base ai comandi imposti dal pilota [1]. Conseguentemente si è sentita l'esigenza di sviluppare metodologie agli stati in grado di trattare in modo agevole l'implementazione di controllori sempre più complessi.

Verso la fine degli anni '50 nasce la Teoria del Controllo Moderno, basata su modelli formulati nello spazio degli stati. Il problema del controllo ottimo lineare quadratico (LQ) trova la sua genesi nel lavoro di N. Winer (negli anni 1940-49) sulla teoria del filtraggio ottimo, sviluppato per applicazioni belliche durante la seconda guerra mondiale.

Importanti sono stati i contributi di L. S. Pontryagin (1956), R. Bellman (1957) e soprattutto R. E. Kalman (1960). Proprio in quegli anni, grazie al contributo di molti ricercatori tra i quali lo stesso Kalman, il problema del controllo ottimo LQ fu formalizzato per la prima volta, così com'è conosciuto ancora oggi [2]. Il nome "Lineare Quadratico" discende dal fatto che i sistemi considerati sono assunti essere lineari, mentre gli indici di costo per misurare le prestazioni coinvolgono i quadrati (pesati in modo opportuno) delle variabili in gioco.

A partire dagli anni Sessanta, la ricerca è stata indirizzata verso lo sviluppo di tecniche di controllo ad hoc per progettare controllori multi variabile.

Le moderne teorie del controllo hanno avuto, negli ultimi decenni, un notevole impatto nell'industria aeronautica. Esempi di aziende che hanno impiegato tali teorie sono la Boeing, per il design e lo sviluppo dei sistemi di controllo del 767, e la General Dynamics che, per il sistema di controllo del AFTI/F-16, ha impiegato il metodo lineare quadratico (LQ). Fondamenta della moderna teoria del controllo sono due punti essenziali. Il primo punto prevede che il progetto dei sistemi di controllo sia basato su una descrizione del modello in variabili di stato. In secondo luogo è prevista la possibilità di tradurre le specifiche di prestazione in un criterio di ottimizzazione di un'opportuna funzione scalare, tipicamente una forma quadratica, assunta come indice di prestazione o indice di costo (PI) [3].

Rispetto alle tradizionali tecniche di sintesi dei controllori, con le tecniche moderne vi è una sostanziale differenza nel modo di procedere per la determinazione della matrice dei guadagni.
La teoria classica del controllo dei sistemi di tipo MIMO prevede che i guadagni di anello vengano determinati dalla chiusura consecutiva, a partire dall'anello più interno, di tutti i rami in retroazione che costituiscono il sistema. Tale procedura, seppur consolidata dall'esperienza dei progettisti, comporta un notevole dispendio di tempo e il rischio di accumulare errori.
Nell'ambito della moderna teoria del controllo, tramite la descrizione in variabili di stato e l'ottimizzazione del PI, si giunge alla scrittura di un set di equazioni matriciali, la cui soluzione rappresenta proprio la matrice dei guadagni di chiusura. In pratica ciò significa chiudere, col giusto guadagno, simultaneamente, tutti i rami in retroazione. Il vantaggio di tale tecnica è evidente nel caso in cui il sistema da controllare sia di tipo MIMO (e con molti rami in retroazione).
Tradizionalmente, in letteratura, la moderna teoria del controllo ottimo è proposta sfruttando la retroazione completa delle variabili di stato (full state feedback). Purtroppo nel caso del controllo di un velivolo, tale approccio non è adeguato poiché non tutti gli stati del sistema sono misurabili e quindi disponibili per essere retroazionati. Infatti, nonostante l'impiego di sensori di bordo sempre più sofisticati, non è talvolta possibile disporre dell'intero vettore di stato; sarebbe necessario introdurre osservatori dello stato che complicherebbero ulteriormente il sistema di controllo stesso e la gestione della matrice di controllo al variare della condizione di volo [3].
Da queste esigenze, molti autori hanno sviluppato tecniche di calcolo basate sulla retroazione delle uscite misurate (output measured feedback), alcuni esempi sono: l'assegnazione dell'autostruttura (eigenstructure assignment), il controllo ottimo lineare quadratico con retroazione delle uscite (LQOF).
Allo scopo di valutare l'effettivo vantaggio offerto dalle tecniche descritte, nel presente lavoro è stata eseguita la sintesi di un sistema di controllo di tipo C.A.S. fornito dalle "Piaggio Aero Industries" utilizzando una metodologia agli stati e sono stati confrontati i risultati con quelli ottenuti mediante l'approccio classico. L'azienda ha messo a disposizione il modello in variabili di stato della dinamica linearizzata longitudinale di un velivolo FBW denominato P1xx. Sono stati inoltre forniti: lo schema del FCS longitudinale, i modelli dei sensori e del sistema di attuazione nonché le specifiche di prestazione da rispettare.
Per perseguire lo scopo prefissato, il lavoro di tesi è stato suddiviso in due parti. La prima parte è stata dedicata all'approfondimento delle tecniche moderne di analisi, quali: l'assegnazione dell'autostruttura, la regolazione lineare quadratica con retroazione dello stato o

delle uscite (LQR/LQROF) e l'ottimizzazione LQ ad inseguimento con retroazione delle uscite (LQTOF). Nella seconda parte, è stato invece affrontato il problema della sintesi del controllore CAS.

Di seguito è riportata una breve descrizione di quanto trattato nei vari capitoli.

I Capitolo

Nel primo capitolo è affrontato il problema dell'assegnazione dell'autostruttura (Eigenstructure Assignment) mediante retroazione. È stata realizzata una procedura in Matlab® per l'allocazione dei poli del sistema in ciclo chiuso e la realizzazione di una struttura desiderata per gli autovettori. Come esempio di applicazione è stato affrontato il problema proposto in [5], della realizzazione un controllore SAS (Stability Augmentation System) relativo al piano laterodiezionale del velivolo Lockheed L-1011.

II Capitolo

Il secondo capitolo è rivolto all'approfondimento del problema del controllo ottimo LQ ed è riportata una sintesi delle principali tecniche basate sulla retroazione dello stato e delle uscite misurabili. In particolar modo è trattato il problema dell'inseguimento di un segnale di riferimento sfruttando la retroazione delle uscite misurate (LQTOF) e della realizzazione di una procedura di calcolo atta a determinare la matrice dei guadagni di chiusura del sistema.

III Capitolo

La seconda parte del lavoro inizia col terzo capitolo. È stata focalizzata l'attenzione sulla descrizione del sistema di controllo del quale si vuole ottenere la sintesi e sulla dinamica longitudinale linearizzata del velivolo P1xx. Sono state inoltre esposti i criteri di progetto seguiti e le specifiche di prestazione.

Il modello completo che descrive il sistema è stato realizzato in ambiente Matlab®, con l'ausilio del toolbox Simulink®.

IV Capitolo

Nel quarto capitolo è stata eseguita la sintesi del sistema di controllo mediante il luogo delle radici e il diagramma di Bode, per una condizione di volo di riferimento.

Tra le metodologie agli stati studiate, la tecnica LQTOF è stata ritenuta la più idonea a risolvere il problema proposto. È stata realizzata una procedura iterativa, implementata in Matlab®, per la determinazione della matrice dei guadagni del sistema, basata sulla minimizzazione di un funzionale PI. Infine è stato fatto un confronto tra i risultati ottenuti dalla sintesi tramite il metodo classico e il metodo LQTOF.

V Capitolo

In primo luogo sono stati valutati gli effetti di filtri tipo anticipo-ritardo sui rami feedforward e sul pitch damper presenti nel modello, successivamente sono stati ottimizzati per raggiungere le prestazioni prescritte dalle specifiche.

Nel quinto capitolo è stato impiegato il metodo LQTOF al fine di ottenere un esempio di scheduling dei guadagni. Sono state inoltre eseguite verifiche sulla robustezza del sistema in presenza di errore sui guadagni di chiusura.

VI Capitolo

Nell'ultimo capitolo sono riportate le conclusioni tratte dal lavoro svolto e gli eventuali sviluppi futuri.

Capitolo 1

1. Assegnazione dell'autostruttura

1.1 Introduzione

Uno dei temi fondamentali della "Teoria del Controllo" è lo studio dei sistemi in retroazione. Gli obbiettivi fondamentali della retroazione sono:

1. Assicurare o migliorare le caratteristiche di stabilità dei sistemi
2. Ridurre la sensibilità del sistema agli errori di modellazione
3. Migliorare la capacità di rigettare disturbi e attenuare i rumori
4. Modificare la risposta del sistema durante il transitorio

In merito all'ultimo punto, si può asserire che la retroazione (dello stato, delle uscite o delle uscite misurate) è uno strumento fondamentale per la modellazione della risposta di un sistema lineare tempo invariante (LTI), durante il transitorio [5].
Le tecniche classiche di progettazione dei sistemi di controllo, come il luogo delle radici o il diagramma di Bode, sono applicabili direttamente solo ai sistemi SISO. Quindi, nel caso dei sistemi MIMO e con retroazioni multiple, richiedono la chiusura consecutiva di un anello alla volta. Gli svantaggi che derivano dal metodo sono il notevole dispendio di tempo e di accumulo dell'errore.
Le moderne teorie del controllo possono essere usate per assegnare la posizione dei poli in sistemi MIMO in precise posizioni attraverso la soluzione di un'equazione matriciale. In realtà è possibile spingersi oltre il semplice posizionamento dei poli. È possibile determinare almeno parzialmente, anche gli autovettori del sistema: è possibile assegnare l'autostruttura del sistema.
Oltre che dall'esperienza del progettista, per il posizionamento dei poli, esistono indicazioni, nelle norme militari, atte a soddisfare i requisiti imposti per le qualità di volo.
La risposta temporale, dipende sia dalla posizione dei poli dalla struttura degli autovettori del sistema. Dunque l'opportunità di fissare contemporaneamente autovalori ed autovettori è di rilevante importanza per il progetto dei sistemi di controllo dei velivoli.

1.2 Analisi dell'autostruttura

Le equazioni del moto linearizzate di un velivolo nello spazio degli stati possono essere scritte come:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad 1.2.1$$

La matrice A, di dimensione $(n \times \mathrm{n})$, descrive la dinamica linearizzata del velivolo. La matrice B $(n \times \mathrm{m})$ rappresenta la distribuzione degli ingressi di attuazione sugli stati. La matrice C $(p \times \mathrm{n})$ descrive invece come vengono osservati gli stati in uscita dal sistema. D $(n \times \mathrm{m})$ generalmente è nulla tranne se le accelerazioni del sistema sono incluse nel vettore delle uscite. Con $x(t) \in \mathbb{R}^n$ si indica il vettore degli stati, con $u(t) \in \mathbb{R}^m$ il vettore degli ingressi di controllo e con $y(t) \in \mathbb{R}^p$ il vettore delle uscite misurate.

La matrice A può essere rappresentata tramite i suoi n autovalori $\Lambda = [\lambda_1 \dots \lambda_i \dots \lambda_n]$ e i corrispondenti autovettori $\mathrm{V} = [v_1 \dots v_i \dots v_n]$. L'insieme degli autovettori V costituisce una base dello spazio degli stati $x(t)$.

La relazione $AV = V\Lambda$ fornisce gli autovettori destri del sistema mentre rappresentazione duale $WA = \Lambda\mathrm{W}$ fornisce gli autovettori sinistri: $\mathrm{W}^{\mathrm{T}} = [w_1 \dots w_i \dots w_n]$.

Risolvendo l'equazione 1.21, si giunge all'espressione della risposta temporale del sistema:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} C v_i w_i^T e^{\lambda_i t} x_0 + \sum_{i=1}^{n} C v_i \int_0^t e^{\lambda_i (t-\tau)} w_i^T B u(\tau) d\tau \qquad 1.2.2$$

Essa si compone di due termini. Il primo termine del secondo membro è legato alle condizioni iniziali e rappresenta la parte omogenea della risposta. Il secondo termine, dipende dagli ingressi al sistema e rappresenta la componente forzata.

L'intera risposta di un sistema lineare dipende quindi da quattro variabili:

1) Gli autovalori del sistema
2) Gli autovettori del sistema
3) La condizione iniziale
4) L'ingresso al sistema

Ognuna di queste variabili gioca un ruolo cruciale definendo l'effetto complessivo dei modi e degli ingressi sulla risposta temporale.

Per semplificare la scrittura della parte omogenea, indicata con $y(t)_o$, si sostituisce α_i agli scalari $(w_i^T x_0)$ ottenendo:

$$y(t)_o = \sum_{i=1}^{n} C\alpha_i v_i e^{\lambda_i t} \qquad 1.2.3$$

La 1.2.3 mostra come la $y(t)$ dipenda da una combinazione lineare delle coppie autovalore-autovettore della matrice A. Ognuna di tali coppie definisce un modo del sistema. L'autovalore rappresenta la rapidità con la quale si estingue o si amplifica il modo mentre l'autovettore indica l'intensità di accoppiamento con l'uscita.

Indicando con C_j la j-esima riga della matrice C dall'equazione 1.2.3 si nota che l'accoppiamento dell'i-esimo modo con la j-esima uscita è dato dal prodotto $C_j v_i$.

Se il prodotto $C_j v_i = 0$ significa che l'i-esimo modo non fornisce alcun contributo alla j-esima uscita dal sistema: l'i-esimo modo e la j-esima uscita sono *disaccoppiate* [5].

In generale:

- Cv_i rappresenta una direzione nello spazio vettoriale delle uscite
- l'influenza dell'ingresso di controllo $u(t)$ sull'autovalore λ_i è determinato attraverso $w_i^T B$

Quindi se $Cv_i = 0$, non possono essere osservati spostamenti in uscita in direzione di v_i e quindi il modo è inosservabile.

Se $w_i^T B = 0$, l'ingresso di controllo $u(t)$ non può contribuire a movimenti in direzione di v_i nello spazio delle uscite e quindi il modo non è controllabile [6].

È possibile influenzare l'accoppiamento tra gli ingressi, gli stati e le uscite dal sistema selezionando opportunamente i vettori v_i e w_i in ciclo chiuso. In pratica è possibile modificare il numeratore (zeri) e poli di ogni singola funzione di trasferimento del sistema.

Trasformando il sistema nel dominio di Laplace, si ottiene la matrice di funzioni di trasferimento $H(s)$ tra ingressi e uscite.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \iff (sI - A)X(s) = BU(s) \iff X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \\ y = Cx \end{cases}$$

L'uscita dal sistema può essere scritta come $Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s)$ o, in forma compatta, come: $Y(s) = H(s)U(s)$, avendo posto

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B \qquad 1.2.4$$

Sia $J = diag\{\lambda_i\}$ la forma di Jordan del sistema ed $M = [v_1 \;\; v_2 \;\; \dots \;\; v_n]^T$ la matrice degli autovettori. Per cui vale anche la relazione: $M^{-1} = [w_1 \;\; w_2 \;\; \dots \;\; w_n]^T$.
Sfruttando la forma di Jordan, la matrice del sistema può essere scritta come: $A = MJM^{-1}$.
la funzione di trasferimento tra ingresso e uscita dal sistema può essere scritta come[1]:

$$H(s) = CM(sI - J)^{-1}M^{-1}B$$

Considerando inoltre che la matrice $(sI - J)^{-1}$ è diagonale e i suoi elementi sono de tipo: $1/(s - \lambda_i)$, si può porre:

$$H(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Cv_i w_i^T B}{s - \lambda_i}$$

Dalla precedente equazione si evince che se gli autovalori λ_i sono inosservabili ($C_j v_i = 0$) o non controllabili ($w_i^T B = 0$), il loro contributo all'espansione della $H(s)$ è nullo.
I termini Cv_i e $w_i^T B$ rappresentano i residui dei poli e quindi gli zeri della singola funzione di trasferimento SISO della matrice $H(s)$ di dimensione $p \times m$.
Quindi una tecnica che permetta l'assegnazione degli autovettori in ciclo chiuso, va al di là di quanto si potrebbe ottenere da una semplice allocazione dei poli, in quanto assegnando l'intera autostruttura di fatto si riesce a modellare la risposta temporale del sistema.

[1] Si è sfruttato inoltre il fatto che prese due generiche matrici quadrate e compatibili, P e Q valga la relazione $(QP)^{-1} = P^{-1}Q^{-1}$.

1.3 Assegnazione dell'autostruttura mediante retroazione

In realtà, a seconda di cosa si sceglie di retroazionare, se lo stato, l'uscita o l'uscita soggetta a vincoli, il problema dell'assegnazione dell'autostruttura assume lineamenti differenti.

1) RETROAZIONE DELLO STATO: dato un insieme di autovalori $\{\lambda_i^d\}$ $i = 1 \dots n$ (se presente un'autovalore complesso allora deve esserlo anche il coniugato) e il corrispondente insieme di autovettori $\{v_i^d\}$ $i = 1 \dots n$ si vuole trovare una matrice K di dimensione $m \times n$ di numeri reali tale che $\{\lambda_i^d\}$ siano gli autovalori della matrice $[A + BK]$ e $\{v_i^d\}$ con $i = 1 \dots n$, i corrispondenti autovettori.

2) RETROAZIONE DELL'USCITA: dato un insieme di autovalori $\{\lambda_i^d\}$ $i = 1 \dots r$ (se presente un'autovalore complesso allora deve esserlo anche il coniugato) e il corrispondente insieme di autovettori $\{v_i^d\}$ $i = 1 \dots r$ si vuole trovare una matrice K di dimensione $m \times r$ di numeri reali tale che $\{\lambda_i^d\}$ siano gli autovalori della matrice $[A + BKC]$ e $\{v_i^d\}$ con $i = 1 \dots r$, i corrispondenti autovettori.

3) RETROAZIONE DELL'USCITA VINCOLATA: dato un insieme di autovalori $\{\lambda_i^d\}$ $i = 1 \dots r$ (se presente un'autovalore complesso allora deve esserlo anche il coniugato) e il corrispondente insieme di autovettori $\{v_i^d\}$ $i = 1 \dots r$ si vuole trovare una matrice K nella quale sia possibile fissare alcuni elementi a zero, cosicché r autovalori della matrice $[A + BKC]$ siano proprio $\{\lambda_i^d\}$ $i = 1 \dots r$ e $\{v_i^d\}$ i corrispondenti autovettori.

Quindi il set autovalori/autovettori $\{\lambda_i^d, \boldsymbol{v_i^d}\}$, corrisponde all'autostruttura desiderata in ciclo chiuso ottenuta tramite la matrice K.

Nel caso 1) l'ingresso di controllo è dato da:

$$u(t) = Kx(t) \tag{1.3.1}$$

Nei casi 2) e 3) l'ingresso di controllo è dato da una relazione del tipo:

$$u(t) = Ky(t) \tag{1.3.2}$$

1.3.1 Assegnazione mediante retroazione dell'uscita

La retroazione dello stato non è sempre conveniente. Ciò diventa ovvio considerando sistemi di ordine elevato e le complicazioni al modello che deriverebbero dall'elevato numero di retroazioni. Un'alternativa più vantaggiosa è quella di retroazionare solo alcune variabili misurate, per esempio, le *uscite misurate dal sistema.*

Molti autori affrontarono il problema dell'assegnazione dell'autostruttura sulla base della retroazione parziale delle uscite [5].

Il contributo fondamentale alla soluzione del problema è stato fornito da Srinathkumar S. (1978) il quale ha dimostrato quanto segue.

Dato un sistema come quello descritto dalle 1.2.1, sotto le ipotesi:

- di controllabilità e osservabilità
- con matrici B e C aventi rango pieno pari rispettivamente a m ed r

possono essere assegnati, in ciclo chiuso, un numero di autovalori pari al $max(m,r)$ e, parzialmente, altrettanti autovettori, usando una legge di controllo con retroazione delle uscite del tipo $\boldsymbol{u}(t) = K\boldsymbol{y}(t)$. Gli autovettori non sono assegnabili per intero, se ne può fissare ad arbitrio solo una parte, al massimo un numero di componenti pari al $min(m,r)$.

Prima di giungere alla determinazione della matrice dei guadagni K del sistema è bene sviluppare nell'ordine i seguenti punti:

1. CARATTERIZZAZIONE DEGLI AUTOVETTORI RAGGIUNGIBILI
2. CALCOLO DEGLI AUTOVETTORI RAGIUNGIBILI
3. SCELTA DELLE COMPONENTI DELL'AUTOVETTORE DESIDERATO IN CICLO CHIUSO $\boldsymbol{v_i^d}$
4. PROCEDURA DI CALCOLO DEI GUADAGNI

1. CARATTERIZZAZIONE DEGLI AUTOVETTORI RAGGIUNGIBILI

Si consideri ancora il sistema di partenza descritto dalle 1.2.1 con l'ipotesi semplificativa ma del tutto lecita che sia $D = 0$ (sistema proprio).

Inoltre si assuma la legge di controllo 1.3.2.

Quindi l'equazione che descrive la dinamica del sistema diventa:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A + BKC)\boldsymbol{x}(t) \qquad 1.3.3$$

Si assuma che siano stati forniti $\{\lambda_i\}_{i=1}^{r}$ come l'insieme degli autovalori *desiderati* in ciclo chiuso e sia $\boldsymbol{v}_i$ l'autovettore corrispondente al generico λ_i. Allora per una coppia autovalore/autovettore $\lambda_i, \boldsymbol{v}_i$ in ciclo chiuso vale:

$$(A + BKC)\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i \qquad 1.3.4$$

dalla precedente:

$$\boldsymbol{v}_i = (\lambda_i I - A)^{-1} BKC\boldsymbol{v}_i \qquad 1.3.5$$

Un'ipotesi aggiuntiva che si fa è che nessuno degli autovalori desiderati coincida con quelli della matrice A così che esista la matrice inversa $(\lambda_i I - A)^{-1}$.

È possibile definire il vettore $\boldsymbol{m}_i$ come:

$$\boldsymbol{m}_i = KC\boldsymbol{v}_i \qquad 1.3.6$$

KC è una matrice di dimensione $[m \times n]$ quindi gli $\boldsymbol{m}_i$ sono vettori a m componenti.

In tal modo la 1.3.5 diventa:

$$\boldsymbol{v}_i = (\lambda_i I - A)^{-1} B\boldsymbol{m}_i \qquad 1.3.7$$

La formula precedente ha della conseguenze importanti:

- Gli autovettori $\boldsymbol{v}_i$ devono essere combinazione lineare delle m colonne della matrice $(\lambda_i I - A)^{-1}B$
- Tale sottospazio è di dimensione pari al rango della matrice B. In pratica il numero degli ingressi di controllo determina la dimensione del sottospazio che contiene gli autovettori raggiungibili.

Indicando in modo compatto con L_i la matrice $(\lambda_i I - A)^{-1}$:

$$L_i = (\lambda_i I - A)^{-1} B \qquad 1.3.8$$

Per quanto visto, fissato un autovalore λ_i in ciclo chiuso, l'autovettore deve soddisfare la relazione:

$$\boldsymbol{v}_i = L_i \boldsymbol{m}_i$$

È possibile concludere che se gli autovettori desiderati giacciono nel sottospazio generato dalle colonne della matrice $(\lambda_i I - A)^{-1}B$, allora sono raggiungibili esattamente.

In generale l' autovettore desiderato $\boldsymbol{v_i^d}$ non apparterrà al sottospazio definito dalle colonne di $(\lambda_i I - A)^{-1}B$ quindi non potrà essere raggiunto. D'altra parte la migliore scelta che si può fare è quella di considerare la proiezione di $\boldsymbol{v_i^d}$ sul sottospazio avente come base le colonne di $(\lambda_i I - A)^{-1}B$.

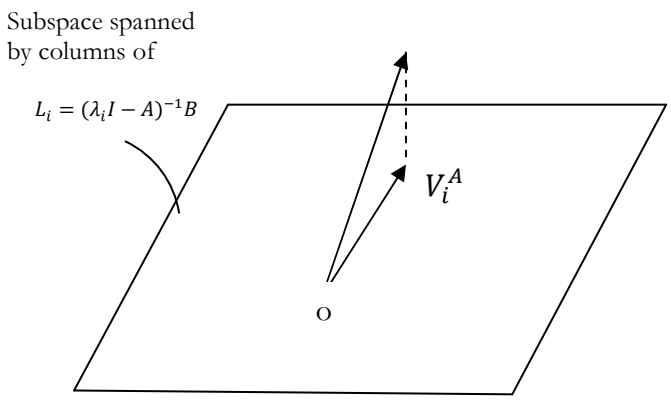


Figura 1.1 Interpretazione geometrica di $\boldsymbol{v_i^d}$ e $\boldsymbol{v_{iA}}$

2. CALCOLO DEGLI AUTOVALORI RAGIUNGIBILI

Per determinare l'autovettore raggiungibile $\boldsymbol{v_{iA}}$ è possibile procedere minimizzando il parametro J definito come:

$$J = \left\| \boldsymbol{v_i^d} - \boldsymbol{v_{iA}} \right\|^2$$

Supponiamo che esista un vettore z_i appartenente a $\mathbb{R}^m$ tale che :

$$\boldsymbol{v_{iA}} = L_i \qquad 1.3.9$$

Quindi J diventa:

$$J = \left\| \boldsymbol{v_i^d} - L_i \boldsymbol{z_i} \right\|^2$$

Si può dunque ottimizzare J rispetto a $\boldsymbol{z_i}$ ponendo: $d\,J/dz_i = 0$

$$2L_i^T\left(L_i z_i - v_i^d\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{z_i} = (L_i^T L_i)^{-1} L_i^T \boldsymbol{v_i^d}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v_{iA}} = L_i\,(L_i^T L_i)^{-1}\,L_i^T\,\boldsymbol{v_i^d}} \qquad 1.3.10$$

A questo punto è bene fare alcune osservazioni:

1) Se un desiderato autovettore $\boldsymbol{v_i^d}$ è pressoché ortogonale al sottospazio definito dalle colonne di L_i , ci sono poche possibilità che esso si traduca in un miglioramento delle prestazioni del sistema.

2) Per ampliare il sottospazio definito dalle colonne di L_i è necessario aumentare il numero delle variabili di controllo. Ciò è conseguente al fatto che la dimensione del sottospazio generato da $(\lambda_i I - A)^{-1}B$ è m. Quindi per aumentare m è necessario incrementare il rango di B.

3) In un sistema con un unico ingresso, (B semplicemente vettore colonna) ci sono poche speranze di ottenere l'autovettore desiderato modificando solo un elemento dell'autovettore.

3. SCELTA DELLE COMPONENTI DELL'AUTOVETTORE DESIDERATO IN CICLO CHIUSO $\boldsymbol{v_i^d}$

In genere nelle applicazioni pratiche non è richiesta l'assegnazione completa delle componenti di $\boldsymbol{v_i^d}$. Il progettista nella maggior parte dei casi è interessato a fissare alcuni elementi degli autovettori in modo da garantire il disaccoppiamento modale. Per fissare le idee ci si può riferire ad un ipotetico autovettore avente la seguente struttura:

$$\boldsymbol{v_i^d} = [v_{i1} \quad x \quad x \quad x \quad x \quad v_{ij} \quad x \quad x \quad v_{in}]^T$$

Dove v_{ij} rappresentano le componenti specificate di $\boldsymbol{v_i^d}$ mentre le componenti indicate con x sono quelle lasciate libere.

A questo punto si procede riordinando il vettore v_i^d come segue:

$$\left\{\boldsymbol{v_i^d}\right\}^{ri} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{l_i} \\ \boldsymbol{d_i} \end{bmatrix} \qquad 1.3.11$$

$\boldsymbol{l_i}$ è il vettore che contiene le componenti specificate, mentre $\boldsymbol{d_i}$ contiene tutte le componenti non specificate[2].

Analogamente si riordinano le righe della matrice $(\lambda_i I - A)^{-1}B$ in conformità a come sono state riordinate le componenti di $\boldsymbol{v_i^d}$.

$$\{(\lambda_i I - A)^{-1}B\}^{ri} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_i \\ D_i \end{bmatrix} \qquad 1.3.12$$

Procedendo come visto per il calcolo degli autovettori raggiungibili, riordinando opportunamente vettori e matrici, in particolare sostituendo $\boldsymbol{v_i^d}$ con $\boldsymbol{l_i}$ e L_i con $\tilde{L}_i$ si ottengono le relazioni:

$$\boldsymbol{z_i} = \left(\tilde{L}_i^T \tilde{L}_i\right)^{-1} \tilde{L}_i^T \boldsymbol{l_i} \qquad 1.3.13$$

$$\boldsymbol{v_{iA}} = L_i \left(\tilde{L}_i^T \tilde{L}_i\right)^{-1} \tilde{L}_i^T \boldsymbol{l_i} \qquad 1.3.14$$

4. PROCEDURA DI CALCOLO DEI GUADAGNI

Riportando l'attenzione al calcolo della matrice dei guadagni, sarà d'ora in poi sott'inteso che parlando di autovettori, ci si riferirà ad autovettori assegnabili (cioè autovalori ottenuti in ciclo chiuso, proiettando sul sottospazio appropriato, gli autovettori desiderati).

Come visto sfruttando una legge di controllo come quella riportata in 1.3.2. l'equazione della dinamica del sistema in ciclo chiuso è:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A + BKC)\boldsymbol{x}(t)$$

Per vantaggi che saranno chiari in seguito, è conveniente trasformare la matrice degli ingressi B come segue:

$$B \rightarrow \begin{bmatrix} I_m \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sfruttando la matrice di trasformazione T definita come: $T = [B \vdots P]$

La matrice P invece è definita in modo che: $rank[T] = n$.

A questo punto la matrice T può essere sfruttata per eseguire un cambiamento di coordinate:

[2] Si indica con $\{\cdot\}^{ri}$ l'operatore che riordina le righe delle matrici e dei vettori come specificato sopra.

$$\boldsymbol{x} = T\tilde{\boldsymbol{x}} \qquad 1.3.15$$

Quindi riscrivendo le equazioni del sistema nelle nuove coordinate si ottiene:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \tilde{A}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \tilde{B}\boldsymbol{u}(t) \qquad 1.3.16$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \tilde{C}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)) \qquad 1.3.17$$

Avendo posto:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT \qquad \tilde{B} = T^{-1}A = \begin{bmatrix} I_m \\ -- \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{C} = CT$$

In seguito alla trasformazione di coordinate, gli autovalori del sistema rimangono invariati mentre gli autovettori sono dati da:

$$T^{-1}\boldsymbol{v_i} = \tilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}} \qquad 1.3.18$$

Di seguito si assumerà che tutte le matrici e i vettori siano già state trasformate. Al fine di ottenere la matrice B, di conseguenza, sarà omessa la notazione ($\tilde{}$).

Se $\boldsymbol{\lambda_i}$ è un autovalore in ciclo chiuso e $\boldsymbol{v_i}$ il corrispondente autovettore in ciclo chiuso, per definizione:

$$(A + BKC)\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i \qquad i = 1,2 \dots, r$$

Che può essere riscritta come:

$$(\lambda_i I - A)\boldsymbol{v}_i = BKC\boldsymbol{v}_i \qquad 1.3.19$$

Si cerca ora una struttura per l'equazione precedente, in modo da tener conto della forma della matrice $B = \begin{bmatrix} I_m \\ -- \\ 0 \end{bmatrix}$;

A tal proposito si decompongono la matrice A e l'autovettore $\boldsymbol{v_i}$ in blocchi come segue:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v_i} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z_i} \\ \boldsymbol{w_i} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_i I_m - A_{11} & | & -A_{12} \\ ------- & | & ------ \\ -A_{21} & | & \lambda_i I_{n-m} - A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{z_i} \\ -- \\ \boldsymbol{w_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \\ -- \\ 0 \end{bmatrix} KC \begin{bmatrix} \boldsymbol{z_i} \\ -- \\ \boldsymbol{w_i} \end{bmatrix} \qquad 1.3.20$$

In seguito a tale scomposizione, dalla prima riga si ottiene:

$$[\lambda_i I_m - A_{11} \quad -A_{12}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{z_i} \\ \boldsymbol{w_i} \end{bmatrix} = KC \begin{bmatrix} \boldsymbol{z_i} \\ \boldsymbol{w_i} \end{bmatrix} \qquad 1.3.21$$

Svolgendo i prodotti si ottiene:

$$(\lambda_i I_m - A_{11})\boldsymbol{z_i} - A_{12}\boldsymbol{w_i} = KC\boldsymbol{v}_i \qquad 1.3.22$$

Quindi

$$\lambda_i I_m \boldsymbol{z_i} - (A_{11}\boldsymbol{z_i} + A_{12}\boldsymbol{w_i}) = KC\boldsymbol{v}_i \qquad 1.3.23$$

Ponendo a questo punto:

$$A_1 = [A_{11} \quad A_{12}] \qquad 1.3.24$$

La 1.3.23 può essere sintetizzata come:

$$\lambda_i \boldsymbol{z_i} - A_1 \boldsymbol{v_i} = KC\boldsymbol{v}_i \qquad 1.3.25$$

e riscritta come:

$$(A_1 + KC)\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{z_i} \qquad 1.3.26$$

Scrivendo l'equazione 1.3.26 per ogni coppia autovalore/autovettore, si ottiene il seguente sintema:

$$\begin{array}{c} (A_1 + KC)\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{z_1} \\ (A_1 + KC)\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{z_2} \\ \text{----------} \\ (A_1 + KC)\boldsymbol{v}_r = \lambda_r \boldsymbol{z_r} \end{array}$$

Ponendo:

$V = [v_1 \;\; v_2 \;\; \dots \;\; v_r]$ $\qquad$ V ha dimensione $n \times r$

$Z = [\lambda_1 z_1 \;\; \lambda_2 z_2 \;\; \dots \;\; \lambda_r z_r]$ $\qquad$ Z ha dimensione $m \times r$

le equazioni precedenti possono essere scritte in forma compatta come:

$$(A_1 + KC)V = Z \qquad 1.3.27$$

Il problema della determinazione della matrice dei guadagni è dunque risolto ricavando K:

$$\boxed{K = (Z - A_1 V)(CV)^{-1}} \qquad 1.3.28$$

Come evidenzia l'equazione 1.3.28, la matrice dei guadagni K è calcolabile se è possibile invertire la matrice CV.

Osservazioni:

1) La matrice dei guadagni K permette di fissare r autovalori e di determinare altrettanti autovettori il più "vicino" possibile a quelli desiderati (nel senso visto in precedenza).
2) Se è richiesto il controllo di un elevato numero di autovalori, potrebbe essere necessario aumentare il rango della matrice C (per esempio aggiungendo sensori al sistema)
3) Se è richiesto che i vettori raggiungibili siano più vicini a quelli desiderati, è necessario aumentare il rango della matrice B (per esempio aumentando il numero dei parametri di controllo)
4) La soluzione è stata determinata retroazionando l'intero vettore delle uscite. Sarebbe più utile una soluzione ottenuta retroazionando solo le uscite misurate.

Proprio sulla base del punto 4), ci si pone obiettivo di risolvere il problema sfruttando solo alcune uscite d'interesse. In pratica si cerca la possibilità di imporre degli zeri nella matrice dei guadagni in modo da poter scegliere la combinazione di uscite in retroazione.

1.3.2 Assegnazione mediante retroazione vincolata dell'uscita

Ripartendo dall'equazione 1.3.27 si procede isolando al primo membro KCV

$$KCV = Z - A_1 V$$

Definendo Ψ e Ω :

$$\Psi \triangleq Z - A_1 V \qquad \Omega \triangleq CV$$

è possibile riscrivere la 1.3.27 come segue:

$$K\Omega = \Psi \qquad 1.3.28$$

Riprendendo la struttura della matrice B precedentemente definita, la 1.3.28 assume la forma:

$$I_m K\Omega = \Psi \qquad 1.3.29$$

Che può essere espansa come:

$$\begin{bmatrix} \Omega^T & 0_m & \cdot & \cdot & \cdot & 0_m \\ 0_m & \Omega^T & \cdot & \cdot & \cdot & 0_m \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \Omega^T & 0_m \\ \cdot & & & & 0_m & \Omega^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1^T \\ \kappa_2^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \kappa_m^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1^T \\ \psi_2^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_m^T \end{bmatrix} \qquad 1.3.30$$

La matrice Ω^T si ripete lungo la diagonale principale mentre fuori da essa risiedono le matrici 0_m.

Il vantaggio di tale struttura è che ogni riga della matrice di guadagno può essere calcolata indipendentemente da tutte le altre righe.

La riga i-esima della matrice dei guadagni è data da:

$$\boxed{\kappa_i = \psi_i \Omega^{-1}} \qquad 1.3.31$$

Per valutare gli effetti prodotti dall'imporre uguale a zero il guadagno su un ramo in retroazione, verrà fissata l'attenzione sulla i-esima riga della 1.3.30:

$$[\,\Omega^T] \begin{bmatrix} \kappa_{i1} \\ \kappa_{i2} \\ \cdot \\ \kappa_{ij} \\ \cdot \\ \kappa_{ir} \end{bmatrix} = \psi_i^T \qquad 1.3.31$$

Se si vincolasse un elemento κ_{ij} a zero, sarebbe come eliminare un elemento κ_{ij} da $\boldsymbol{\kappa_i^T}$ e quindi cancellare la j-esima colonna di Ω^T.
A tal punto si può passare alla soluzione del problema ridotto

$$\widetilde{\Omega}^T \widetilde{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{\psi}_i^T \qquad 1.3.32$$

In cui la matrice $\widetilde{\Omega}^T$ coincide con la matrice Ω^T alla quale è stata eliminata la j-esima colonna mentre $\widetilde{\boldsymbol{\kappa}}_i^T$ è il vettore $\boldsymbol{\kappa_i^T}$ con il suo elemento j-esimo eliminato.
Il problema ridotto è comunque sovra determinato. Ci sono a disposizione più equazioni che incognite. È possibile quindi determinare una soluzione ricorrendo alla *pseudo inversa* indicata col simbolo $(.)^\dagger$.

$$\widetilde{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{T}} = (\Omega^T)^\dagger \psi_i^T \qquad \text{oppure} \qquad \widetilde{\boldsymbol{\kappa}}_i = \boldsymbol{\psi_i} \widetilde{\Omega}^\dagger$$

Se più di un guadagno è fissato a zero in una riga della matrice K bisognerà modificare opportunamente il vettore $\boldsymbol{\kappa_i^T}$ e la matrice $\widetilde{\Omega}^T$.
Il metodo descritto risulta particolarmente versatile per il progettista che, in prima istanza può retroazionare l'intero vettore delle uscite e avere una descrizione delle risposte del sistema e, successivamente può aprire alcuni anelli per verificare come variano le prestazioni. Questo tipo di verifica potrebbe condurre alla progettazione di controllori più semplici da realizzare rispetto ad uno a retroazione completa, pur mantenendone invariate (o accettabili) le prestazioni. Si fa comunque presente il fatto che "aprendo" alcuni rami in retroazione, diventa impossibile fissare gli autovalori esattamente nella posizione desiderata, di conseguenza, anche gli autovettori desiderati non saranno pienamente raggiungibili. Comunque se eliminando una retroazione, autovalori e autovettori subiranno piccole variazioni, il comportamento dinamico del sistema potrebbe risultare ancora buono.
Questo modo di procedere è descritto attraverso un esempio pratico nel paragrafo 1.4.

1.4 Disaccoppiamento tra i modi

E' stato visto in precedenza che gli autovettori desiderati, per poter essere raggiunti, devono essere combinazione lineare delle colonne della matrice $(\lambda_i I - A)^{-1}B$, cioè devono appartenere al sottospazio vettoriale definito dalle sue colonne. In più si è visto come calcolare l'autovettore raggiungibile.

Il progettista in genere affronta il problema da un punto di vista pratico. L'autovettore ***desiderato*** non è definito sulla base di un'analisi matematica o attraverso la definizione di uno spazio vettoriale ma direttamente sulla base delle prestazioni richieste al sistema. In particolare l'esperienza maturata può suggerire la struttura che deve avere perché sia garantito il disaccoppiamento tra i modi.

Se si considera l'equazione della dinamica longitudinale linearizzata di un velivolo, espressa in termini di variabili di stato, una possibile scelta del vettore di stato è la seguente:

$$x = \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \theta \\ u \\ \delta_e \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{angle of attack} \\ \text{pitch rate} \\ \text{pitch angle} \\ \text{forward velocity (perturbed)} \\ \text{elevator deflection} \end{array}$$

Figura 1.2

Il modo di *Corto Periodo* è tipicamente una oscillazione molto smorzata con un periodo di pochi secondi. Esso consiste in una rapida variazione delle variabili di beccheggio (θ e q) e dell'angolo d'incidenza α, mentre la velocità rimane essenzialmente invariata (a causa della brevità del fenomeno).

Il modo di ***Fugoide*** (lungo periodo) è caratterizzato da una marcata variazione della velocità u, dell'angolo di beccheggio θ e dell'altitudine, mentre l'angolo d'incidenza α rimane essenzialmente invariato. L'oscillazione, in questo caso, è causata dalla conversione di energia cinetica (velocità) in potenziale (altitudine) e viceversa, che avviene nel momento in cui il velivolo cerca di ristabilire la condizione di equilibrio, corrispondente al volo livellato, a seguito di una perturbazione. Tipicamente il periodo dell'oscillazione varia tra i 20 e 60 secondi, e il pilota stesso è in grado di controllare l'oscillazione.

È opportuno che il sistema di controllo preservi le caratteristiche 'naturali' dell'aeromobile. Ossia che, anche in ciclo chiuso, la velocità non sia perturbata dal modo di ***Corto Periodo***, e che l'angolo di attacco α non vari in presenza delle oscillazioni di ***lungo periodo***.

Per soddisfare questo requisito, si può richiedere che gli autovettori del sistema in ciclo chiuso siano nella forma:

$$\underbrace{\begin{array}{l} \boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{v_2} = \overline{\boldsymbol{v_1}} \end{array}}_{\text{Corto Periodo}} \quad e \quad \underbrace{\begin{array}{l} \boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ x \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ x \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{v_4} = \overline{\boldsymbol{v_3}} \end{array}}_{\text{Lungo Periodo}}$$

Figura 1.3

I vettori $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$ (con $\boldsymbol{v_2}$ complesso coniugato di v_1) sono rappresentativi del *corto periodo*; sono stati scelti in modo che sia nulla la componente relativa alla perturbazione longitudinale della velocità, u mentre siano accoppiati angolo d'incidenza α e la velocità angolare di beccheggio q.

I vettori $\boldsymbol{v_3}$ e $\boldsymbol{v_4}$ (con $\boldsymbol{v_4}$ complesso coniugato di $\boldsymbol{v_3}$) sono rappresentativi del moto di *lungo periodo* (o fugoide). Sono accoppiate le variazioni dell'angolo d'assetto e la velocità di perturbazione u, mentre è stato mantenuto costante l'angolo d'incidenza (quindi la perturbazione d'incidenza $\alpha = 0$).

Si noti che sarà impossibile realizzare un completo disaccoppiamento tra i modi avendo a disposizione solo l'ingresso di elevatore (in tal caso il rango della matrice B è pari a 1) .

Per quanto riguarda la dinamica laterodirezionale linearizzata di un velivolo, espressa in termini di variabili di stato, una possibile scelta del vettore di stato è la seguente:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} r \\ \beta \\ p \\ \varphi \\ \delta_r \\ \delta_a \end{bmatrix} \begin{array}{l} yaw\ rate \\ sideslip\ angle \\ roll\ rate \\ back\ angle \\ rudder\ deflection \\ aileron\ deflection \end{array}$$

Figura 1.4

Il comando di alettone non dovrebbe eccitare il dutch roll: si lasceranno associate la velocità angolare d'imbardata r e l'angolo d'imbardata β col dutch-roll mentre sarà disaccoppiato il modo di "roll subsidence" il quale coinvolge p e φ.

Analogamente, l'oscillazione di dutch roll non dovrebbe avere effetto su p o su φ.

La struttura che dovrebbero avere gli autovalori per raggiungere il disaccoppiamento descritto è:

$$\underbrace{w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ x \\ x \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ x \\ x \end{bmatrix} \qquad w_2 = \overline{w_1}}_{\text{Datch Roll}} \qquad e \qquad \underbrace{w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ x \\ x \\ x \end{bmatrix}}_{\text{Rollio}}$$

Figura 1.5

uò avvenire se gli autovettori indicati possono essere raggiunti.

Come si vede in (w_1, w_2) restano accoppiate la velocità angolare d'imbardata r e l'angolo di derapata β mentre la velocità angolare di rollio p o l'angolo di rollio φ sono stati soppressi.

L'autovettore w_3, associato al modo di rollio, evidenzia il disaccoppiamento con la velocità angolare d'imbardata r e l'angolo di derapata β fissando a zero le relative componenti.

L' effetto di questa scelte per gli autovettori è ottenere l'ortogonalità tra i "sottovettori" che compongono le prime quattro componenti dei modi di dutch roll e il corrispondente "sottovettore" del modo di rollio.

Come si nota, in ogni caso, gli ingressi di controllo: deflessione di elevatore, (δ_e), rudder (δ_r) e alettone (δ_a), non sono stati specificati. Ciò è stato fatto perché potessero assumere il valore necessario a raggiungere gli autovettori desiderati.

1.5 Esempio di applicazione del metodo: sintesi di un controllore SAS

Come applicazione del metodo dell'assegnazione dell'autostruttura con retroazione dell'uscita, di seguito è trattato un caso di sintesi di un sistema di controllo per l'aumento della stabilità laterodirezionale (SAS), tratto da [5].

Si considera il modello della dinamica laterodirezionale del Lockheed L-1011. Nel modello è incluso un filtro di washout (passa alto) sul ramo di retroazione della velocità angolare d'imbardata r. Si considera come condizione di volo quella di crociera.

$$x = \begin{bmatrix} \delta_r \\ \delta_a \\ \varphi \\ r \\ p \\ \beta \\ x_7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Deflessione del timone di direzione (rad)} \\ \text{Deflessione dell'alettone (rad)} \\ \text{Angolo di rollio (bank angle)} \\ \text{Velocità angolare d'mbadata (yaw rate) (rad/s)} \\ \text{Velocità angolare di rollio (roll rate) (rad/s)} \\ \text{Angolo di derapata (sideslip angle) (rad)} \\ \text{Stato relativo al filtro di washout} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.744 & -0.032 & -0.154 & -0.0042 & 1.54 & 1.54 & 0 \\ 0.337 & -1.12 & 0.249 & -1.0 & -5.2 & -5.2 & 0 \\ 0.02 & 0 & -0.996 & -0.000295 & -0.117 & -0.117 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 25 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Matrice di} \\ \text{accoppiamento} \\ \text{tra ingressi e stati} \end{array}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Matrice di} \\ \text{accoppiamento} \\ \text{tra ingressi e uscite} \end{array}$$

$$u = \begin{bmatrix} \delta_{r_c} \\ \delta_{a_c} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Comando di timone di direzione (rad)} \\ \text{Comando di alettone (rad)} \end{array}$$

$$y = \begin{bmatrix} r_{wo} \\ p \\ \beta \\ \varphi \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Washed out yaw rate} \\ \text{Roll rate} \\ \text{Sideslip angle} \\ \text{Bank angle} \end{array}$$

I poli del sistema in ciclo aperto sono dati dalla soluzione dell'equazione: $[A - \lambda I] = 0$. Nella tabella 1.1 se ne riporta il valore:

$\lambda_1 = -20.0$	Polo dell'attuatore del timone di direzione
$\lambda_2 = -25.0$	Polo dell'attuatore dell'alettone
$\lambda_{3,4} = -0.0884 \pm j1.272$	Poli complessi coniugati del modo di dutch roll
$\lambda_5 = -1.085$	Polo di rollio
$\lambda_6 = -0.00911$	Polo spirale
$\lambda_7 = -0.5$	Polo del filtro di washout

Tabella 1.1

Dato che il rango della matrice è: $rank[C] = 4$, si possono modificare quattro autovalori in ciclo chiuso. Si modificano quindi gli autovalori relativi ai poli di dutch roll e di rollio come riportato in tabella 1.2.

$\lambda_{3,4} = -1.5 \pm j1.5$	Poli complessi coniugati del modo di dutch roll
$\lambda_{5,6} = -2.0 \pm j1.5$	Poli complessi coniugati del modo di rollio

Tabella 1.2

Come visto nel paragrafo precedente, agli autovalori scelti potranno essere associati altrettanti autovettori dei quali potranno essere fissate un numero pari al $\min(m, r)$ di componenti in modo da ottenere il disaccoppiamento dei modi.

$$\begin{array}{c} \delta_r \\ \delta_a \\ \varphi \\ r \\ p \\ \beta \\ x_7 \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ x \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \\ x \\ 0 \\ 1 \\ x \end{bmatrix}}_{\text{Datch roll}} \quad e \quad \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x \\ 1 \\ 0 \\ x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Rollio}}$$

Per risolvere il problema saranno considerati di seguito quattro possibili configurazione di controllori (riportati in Tab.1.3) ottenuti con retroazione dell'uscita: $u = Ky = [K]\begin{bmatrix} r_{wo} \\ p \\ \beta \\ \varphi \end{bmatrix}$

I Controllore	$K(1)y = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{wo} \\ p \\ \beta \\ \varphi \end{bmatrix}$	Ogni uscita è retroazionata agli ingressi
II Controllore	$K(2)y = \begin{bmatrix} x & 0 & x & 0 \\ x & x & x & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{wo} \\ p \\ \beta \\ \varphi \end{bmatrix}$	p , φ non retroazionati sul timone δ_r
III Controllore	$K(3)y = \begin{bmatrix} x & 0 & x & 0 \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{wo} \\ p \\ \beta \\ \varphi \end{bmatrix}$	p , φ non retroazionati sul timone δ_r r_w non retroazionato su timone δ_a
IV Controllore	$K(4)y = \begin{bmatrix} x & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{wo} \\ p \\ \beta \\ \varphi \end{bmatrix}$	p , φ non retroazionati sul timone δ_r r_w , β non retroazionato su timone δ_a

Tabella 1.3

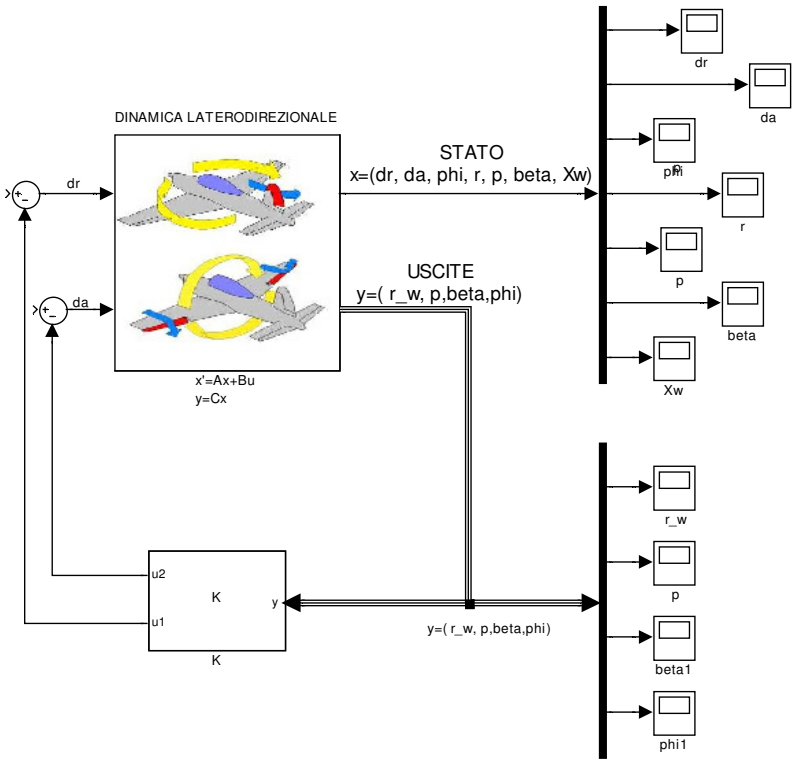


Figura 1.6-Modello Simulink® per la simulazione del controllo laterodirezionale

Controllore	Modo timone	Modo alettone	Dutch roll mode	Modo di rollio	Polo wash out
$K(1)=\begin{bmatrix}-3.34 & 0.148 & 4.9 & 0.372\\ -1.4157 & -2.42 & 6.356 & -4.77\end{bmatrix}$	-17.1	-22.0	$-1.5\ \pm j\,1.50$ $\omega=2.12$ $\zeta=0.707$	$-2\pm j\,1.50$ $\omega=2..5$ $\zeta=0.8$	-0.699
$K(2)=\begin{bmatrix}-3.34 & 0 & 4.9 & 0\\ -1.4157 & -2.42 & 6.356 & -4.77\end{bmatrix}$	-17.1	-22.0	$-1.5\ \pm j\,1.50$ $\omega=2.12$ $\zeta=0.707$	$-1.97\ \pm j\,1.49$ $\omega=2.47$ $\zeta=0.79$	-0.696
$K(3)=\begin{bmatrix}-3.34 & 0 & 4.9 & 0\\ 0 & -2.42 & 6.356 & -4.77\end{bmatrix}$	-17.2	-22.1	$-1.6\ \pm j\,1.21$ $\omega=2.01$ $\zeta=0.798$	$-1.8\ \pm j\,1.79$ $\omega=2.54$ $\zeta=0.711$	-0.729
$K(4)=\begin{bmatrix}-3.34 & 0 & 4.9 & 0\\ 0 & -2.42 & 0 & -4.77\end{bmatrix}$	-17.2	-22.2	$-1.42\pm j\,1.73$ $\omega=2.24$ $\zeta=0.633$	$-2.03\pm j\,1.24$ $\omega=2.54$ $\zeta=0.853$	-0.668
Ciclo Aperto $K=0$	-20.0	-25.0	-0.0882 $\pm j\,1.27$ $\omega=1.27$ $\zeta=0.0693$	Rollio -1.09 Spirale -0.00916	-0.5

Tabella 1.4

In figura 1.6 è riportato lo schema del sistema di controllo realizzato in Simulink®. Quanto esposto nei paragrafi 1.3.1 e 1.3.2 per la determinazione della matrice dei guadagni del sistema è stato tradotto in una procedura di calcolo implementata in uno "script" Matlab® riportato in appendice A.

In tabella 1.4 sono riportati i risultati ottenuti per le matrici dei guadagni nei quattro casi e, per ognuno, i valori dei poli in ciclo chiuso.

La retroazione totale delle uscite tramite la matrice $K(1)$ permette di raggiungere esattamente gli autovalori desiderati in ciclo chiuso. Comunque, tutte le matrici di controllo $K(i)$ offrono, per i modi di dutch-roll e rollio, adeguati valori di pulsazione e smorzamento. Quindi, la soppressione (mirata) di alcuni termini della matrice dei guadagni, sembra non avere particolare rilevanza sui poli in ciclo chiuso.

Ciò si vede bene anche dalle risposte nel tempo del sistema riportate nelle figure seguenti. Nella figura 1.7 è riportata la risposta del sistema, in ciclo aperto, alla condizione iniziale $\beta(0) = 1^{\circ}$, mentre dalla 1.8 alla 1.11, le risposte in ciclo chiuso con le diverse matrici K. Nelle figure da 1.12 e 1.16 sono riportate invece le risposte del sistema alla condizione iniziale e $\varphi(0) = 1^{\circ}$.

Dall'analisi delle figure 1.8-1.11 si vede come il dutch-roll (risposte in β e r) risulti praticamente invariante al variare del tipo di controllore. Analogamente dalle figure 1.13-1.16 si vede come il rollio (risposte in φ e p) si mantenga invariante al variare del tipo di controllore per la condizione iniziale $\varphi(0) = 1^{\circ}$.

L'eliminazione di alcuni elementi della matrice dei guadagni, d'altra parte, implica che gli autovettori raggiungibili si scostino maggiormente da quelli desiderati. Ciò vuol dire che l'orientamento degli autovettori è influenzato dal tipo di controllore scelto, più di quanto non lo siano i poli in ciclo chiuso. Quest'osservazione trova riscontro notando come variano nelle, le risposta di φ e p (figure 1.8 - 1.11), alla condizione iniziale $\beta(0) = 1$ al variare del tipo di controllore scelto. Analogamente discorso vale per le figure 1.13 - 1.16.

RISPOSTE ALLA CONDIZIONE INIZIALE $\boldsymbol{\beta(0) = 1^{\circ}}$

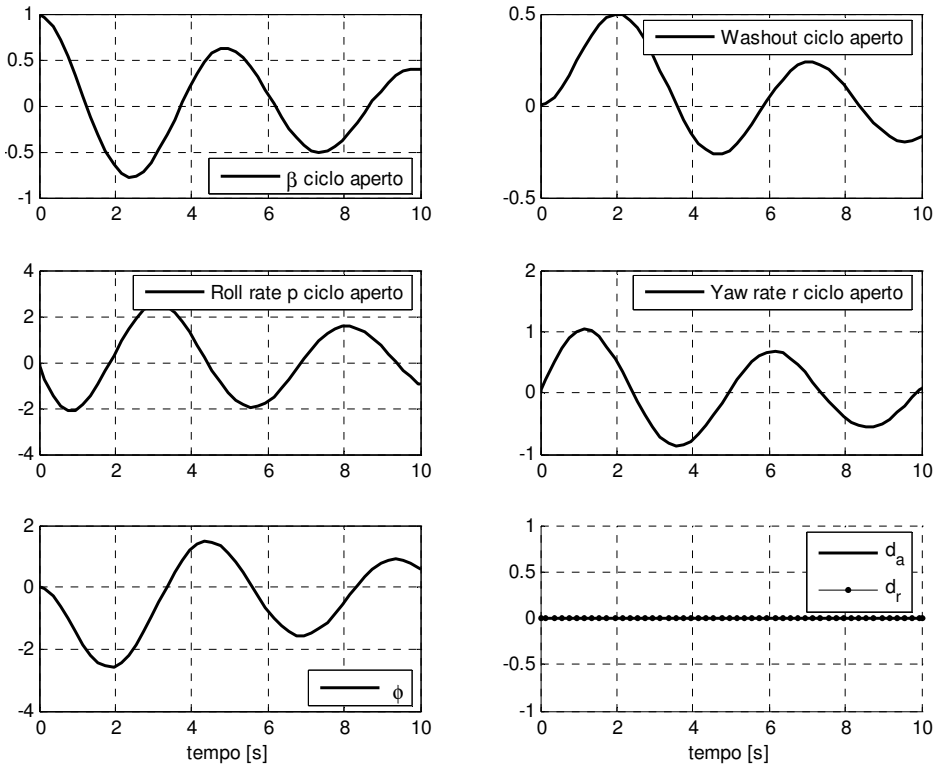


Figura 1.7 Risposta in ciclo aperto a $\boldsymbol{\beta(0) = 1^0}$

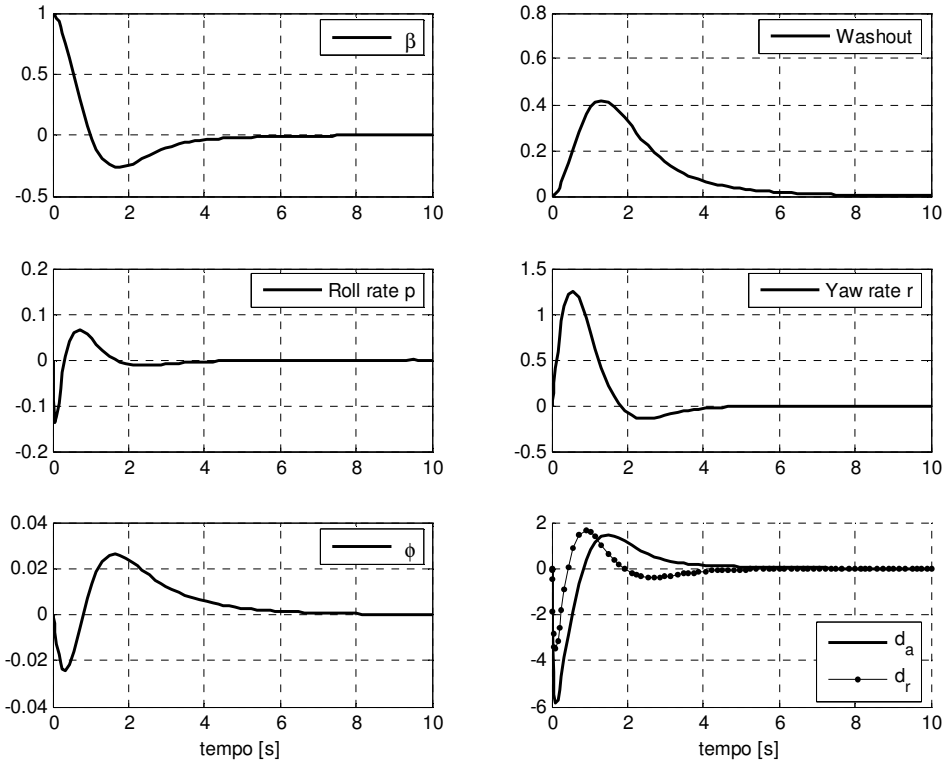


Figura 1.8 Controllo in ciclo chiuso I CONTROLLORE. Risposta a $\boldsymbol{\beta(0) = 1^0}$

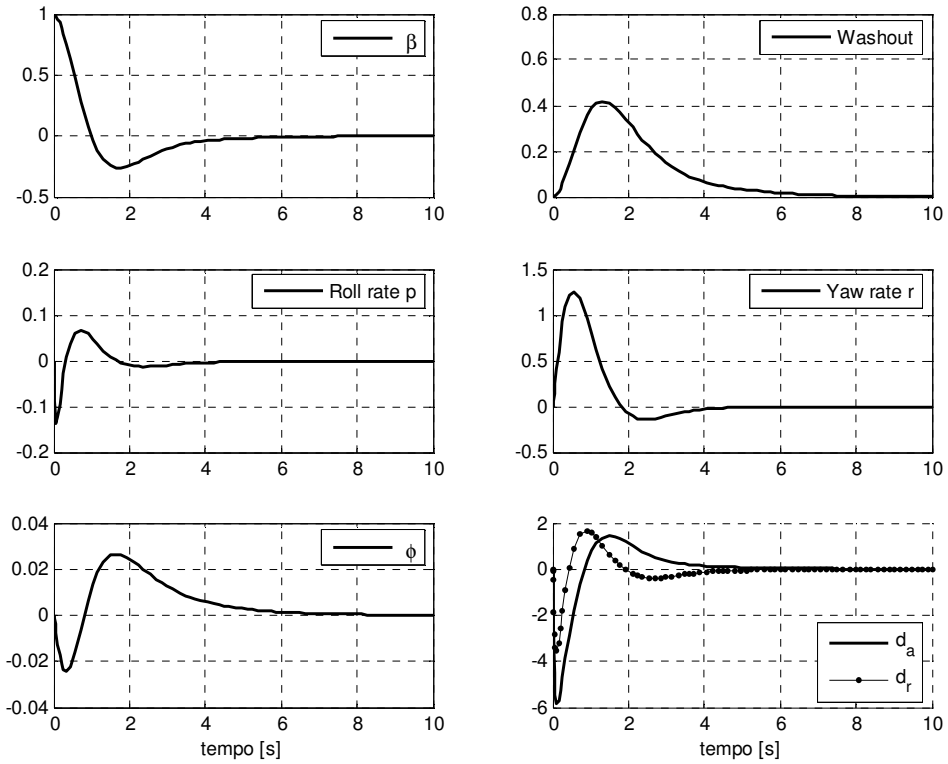


Figura 1.9 Controllo in ciclo chiuso II CONTROLLORE. Risposta a $\boldsymbol{\beta(0) = 1^0}$

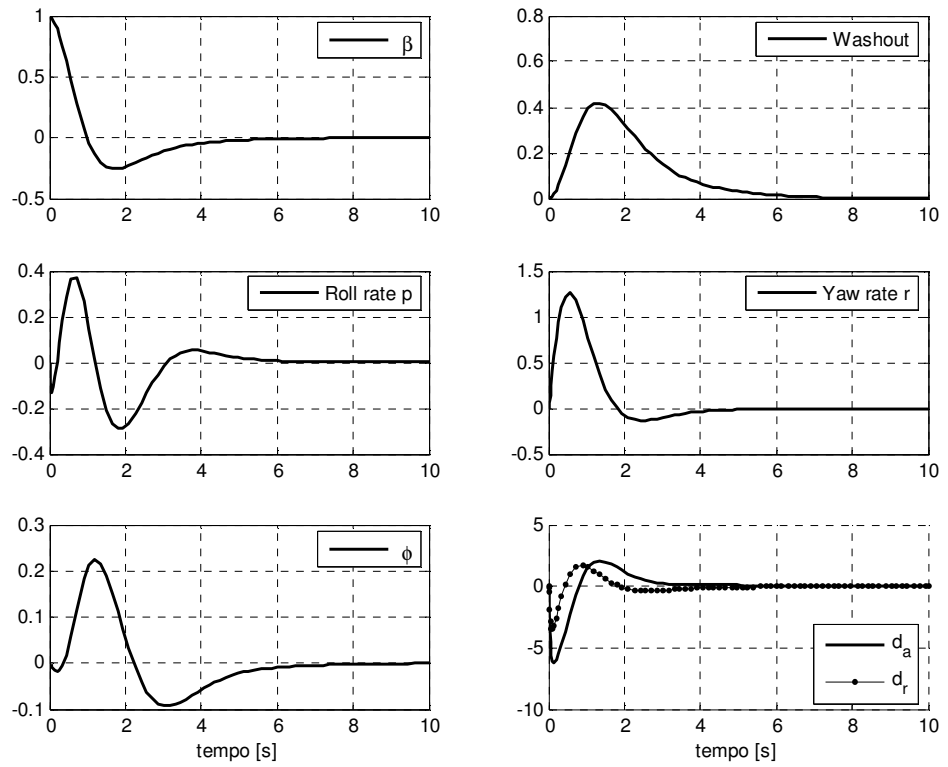


Figura 1.10 Controllo in ciclo chiuso III CONTROLLORE. Risposta a $\boldsymbol{\beta(0) = 1^0}$

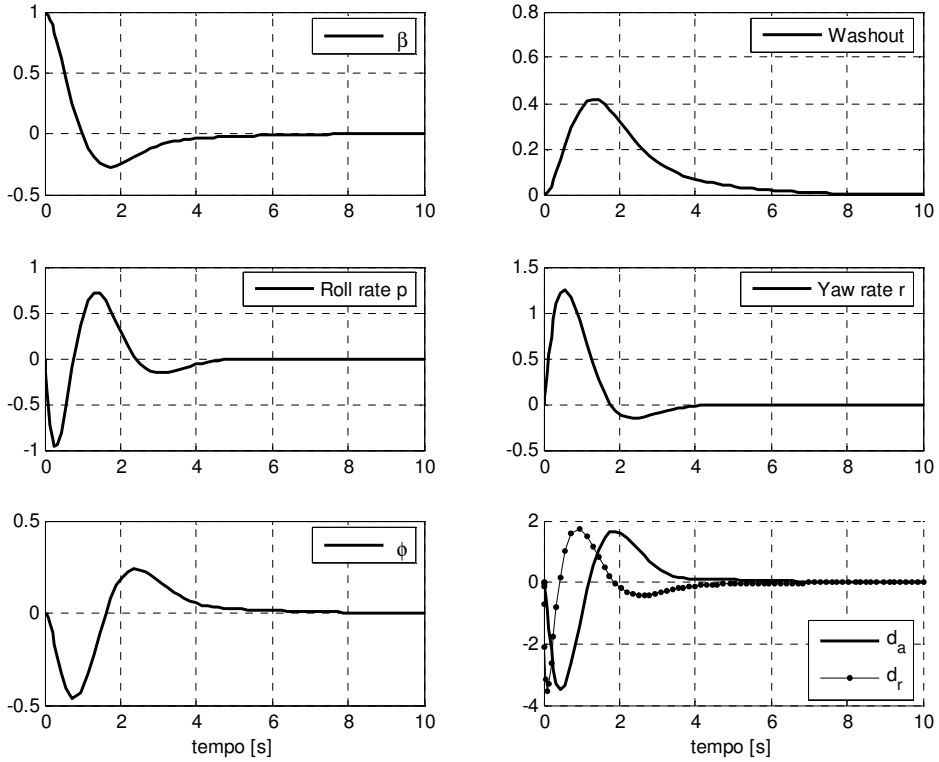


Figura 1.11 Controllo in ciclo chiuso IV CONTROLLORE. Risposta a $\boldsymbol{\beta(0) = 1^0}$

RISPOSTE ALLA CONDIZIONE INIZIALE $\varphi(0) = 1^{\circ}$

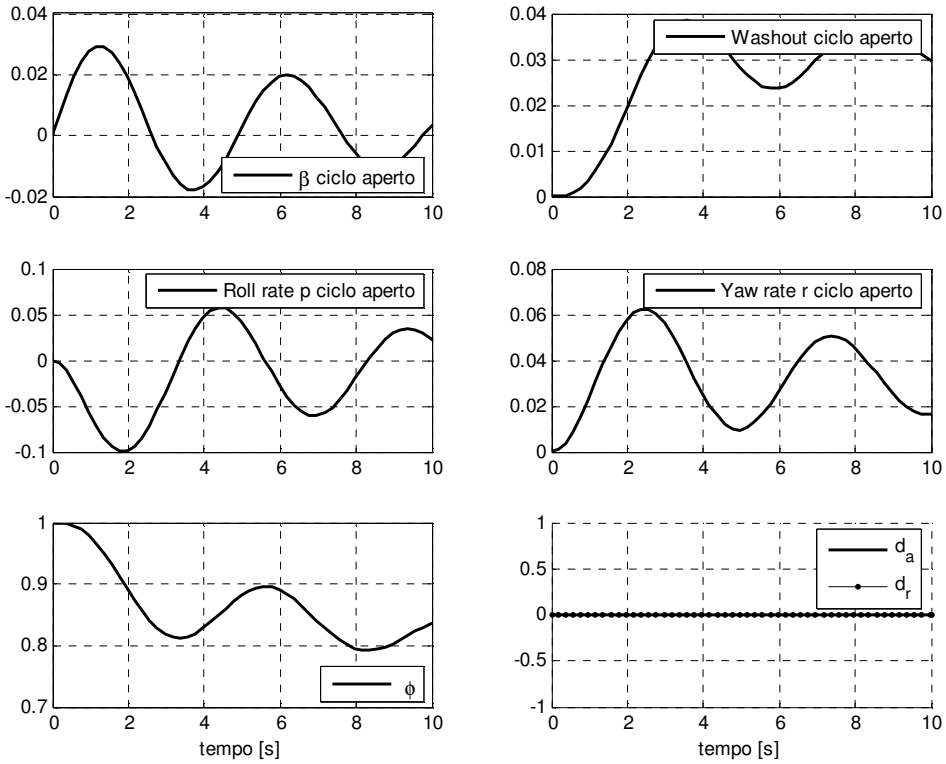


Figura 1.12 Risposta in ciclo aperto a $\boldsymbol{\varphi(0) = 1^0}$

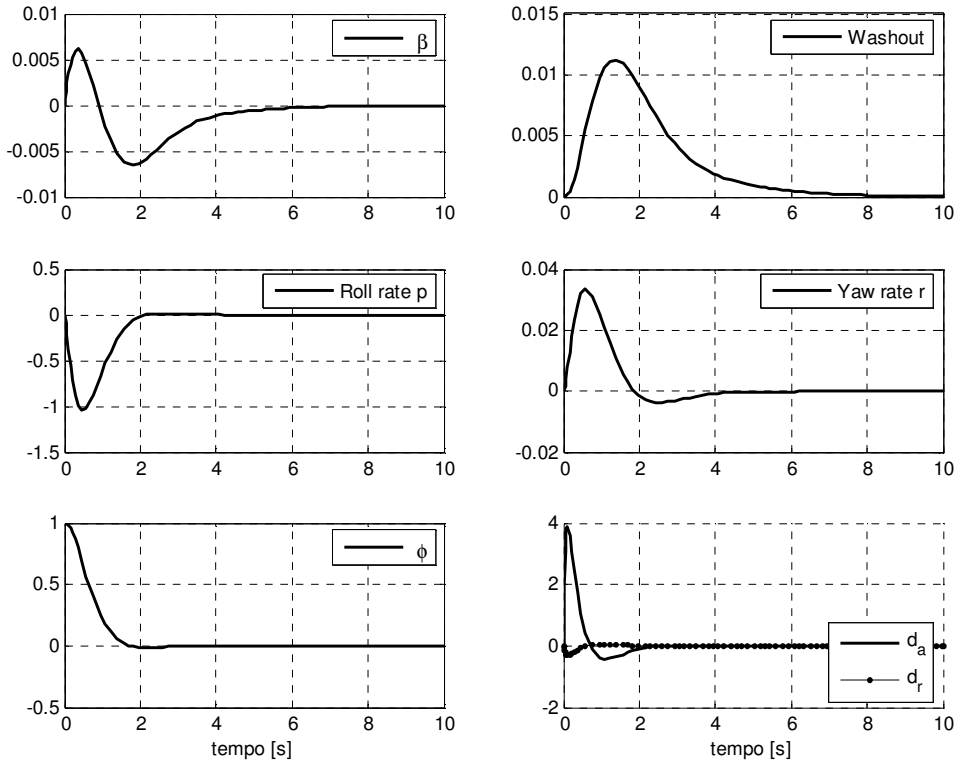


Figura 1.13 Controllo in ciclo chiuso I CONTROLLORE. Risposta a $\varphi(0) = 1^0$

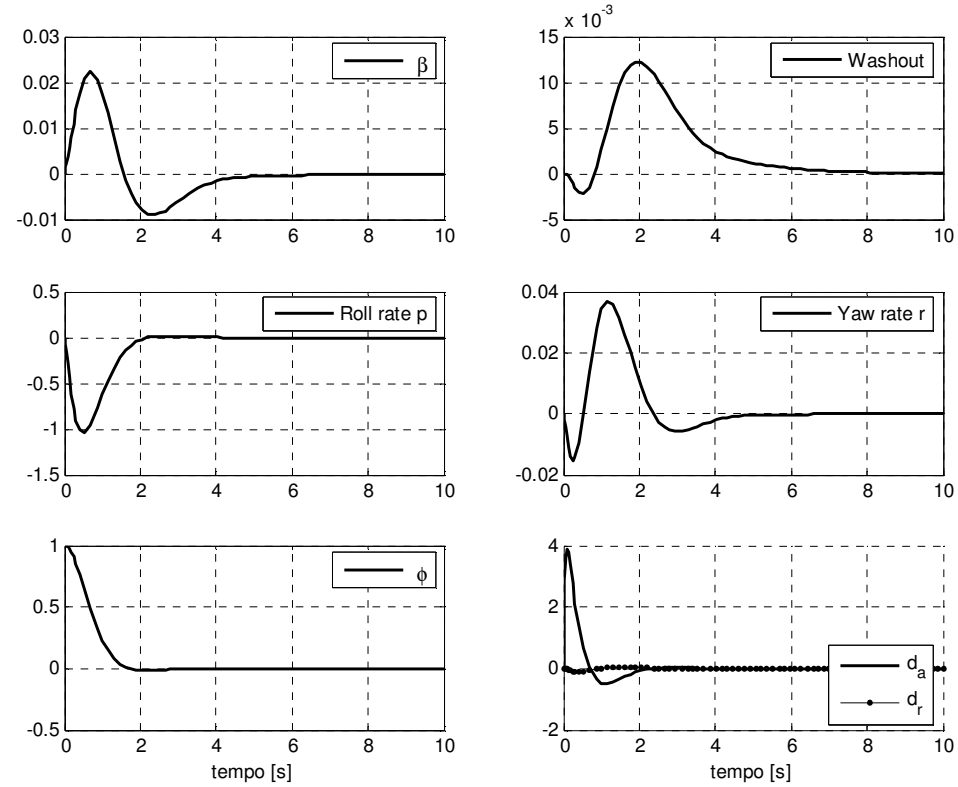


Figura 1.14 Controllo in ciclo chiuso II CONTROLLORE. Risposta a $\varphi(0) = 1^0$

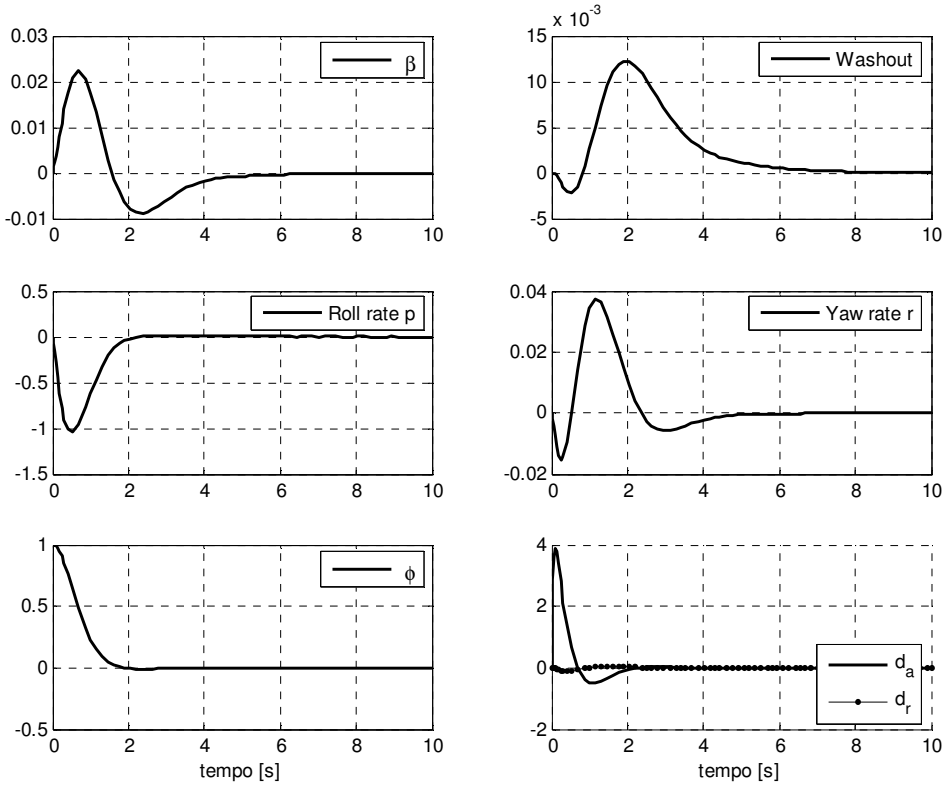


Figura 1.15 Controllo in ciclo chiuso III CONTROLLORE. Risposta a $\varphi(0) = 1^0$

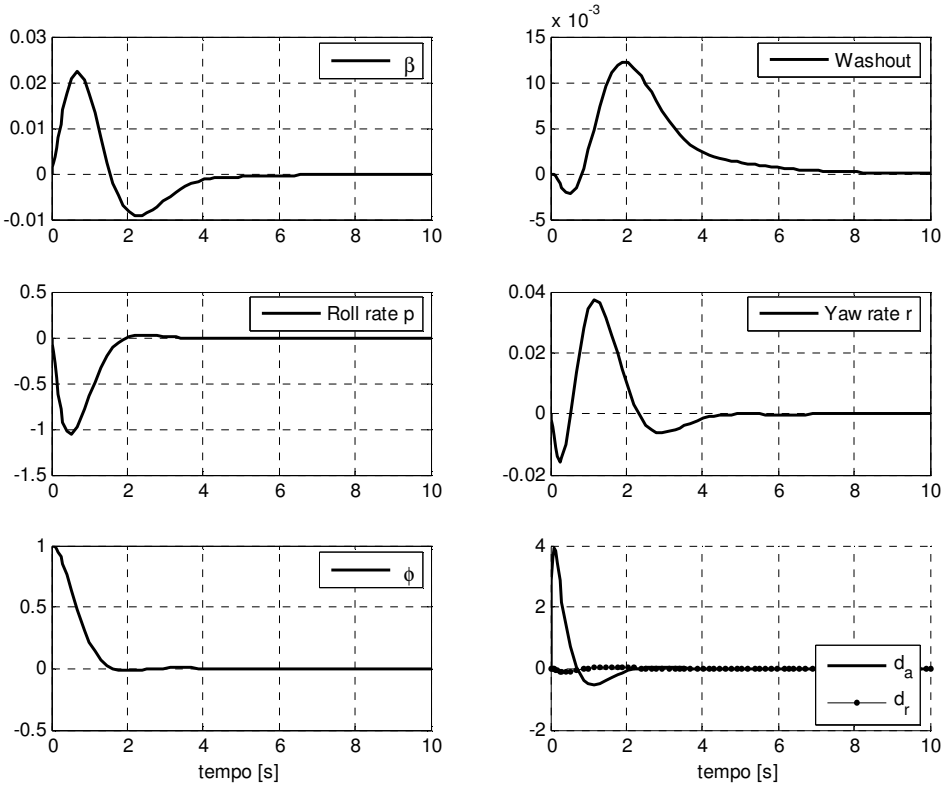


Figura 1.16 Controllo in ciclo chiuso IV CONTROLLORE. Risposta a $\varphi(0) = 1^0$

1.6 Conclusioni

L'assegnazione dell'autostruttura mediante retroazione delle uscite è uno strumento molto potente a disposizione del progettista, il quale può sfruttare la versatilità del metodo per risolvere una vasta gamma di problematiche relative al controllo.
D'altra parte è necessaria una certa conoscenza a priori del sistema da controllare.
Uno degli svantaggi dell'assegnazione dell'autostruttura mediante l'approccio illustrato è che la stabilità del sistema non è matematicamente garantita. Il problema che deriva dalla retroazione delle uscite è che non è possibile dire a priori cosa accada agli $(n-p)$ poli che non vengono assegnati. Infatti, alcuni di essi potrebbero instabilizzarsi nonostante il sistema di partenza sia stabile. Se ciò dovesse accadere o, se i poli non assegnati fossero troppo poco smorzati, bisognerebbe rieseguire il calcolo della matrice dei guadagni partendo da una nuova scelta degli autovalori e degli autovettori desiderati $\{\lambda_i^d, \boldsymbol{v_i^d}\}$.
Si è constatato comunque che, se non si cerca di modificare troppo il comportamento del sistema di partenza (ciò nel caso della realizzazione di un controllo SAS), ossia, se la maggior parte dei poli desiderati in ciclo chiuso non sono troppo lontani da quelli in anello aperto, il problema dell'instabilità dei poli non assegnati non si pone [3].
Un altro aspetto penalizzante del metodo è che non risulta agevole la traduzione di alcune specifiche desiderabili come l'escursione delle grandezze in gioco (variabili di controllo e di stato) nel dominio del tempo. Ciò significa che non è possibile tenerne conto in fase di progettazione.
Per ovviare a tale inconveniente, le specifiche richieste dovrebbero essere definite attraverso una funzione obiettivo e/o dei vicoli. Il progetto della legge di controllo andrebbe dunque condotto in modo da ottimizzare la funzione obbiettivo e contemporaneamente soddisfare, se presenti, i vincoli sulle variabili di interesse. Questa visione del problema di controllo nel dominio del tempo, porterà allo sviluppo della teoria del controllo ottimo [2] trattato ampiamente nel capitolo seguente.

Capitolo 2

2. Controllo Ottimo Lineare Quadratico

2.1 Introduzione

In generale la formulazione di un "problema di controllo ottimo" richiede:

1. un modello matematico che descrive il comportamento del sistema dinamico da controllare
2. un indice di comportamento J (indice di prestazione o funzione di costo) che tiene conto delle specifiche desiderate e delle esigenze del progettista
3. la definizione delle condizioni al contorno e dei vincoli fisici sulle variabili di stato e sul controllo[3].

Mediante tale approccio l'abilità del progettista entra in gioco soltanto nella scelta dell'adeguato criterio di prestazione. Differenti criteri di prestazione implicano differenti risposte in ciclo chiuso e differenti proprietà di robustezza.
La teoria del controllo Lineare Quadratico Multivariabile si contestualizza nella più ampia teoria del Controllo Ottimo Multivariabile. In questo particolare caso di controllo ottimo il sistemi dinamici da controllare è ***Lineare*** e le funzioni che compaiono nell'indice di comportamento sono ***Quadratiche***.
L'indice J è tipicamente un *funzionale* dipendente dallo stato e dagli ingressi ($\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$) tramite delle matrici peso opportunamente definite. Inoltre, in un controllo in ciclo chiuso, stato e ingresso non saranno indipendenti tra loro ma legati dalla legge di retroazione scelta.
Il controllo Lineare Quadratico è una tecnica di sintesi direttamente nel dominio del tempo che permette di affrontare in modo agevole due principali tipologie di problemi di notevole interesse in ambito aeronautico:

- I problemi di regolazione (LQR), tipici del controllo di tipo SAS, hanno come obbiettivo il raggiungimento della stabilità in ciclo chiuso e il soddisfacimento delle specifiche di prestazione.

[3] Il punto 3. in realtà è opzionale

- I problemi d'inseguimento di un comando di riferimento diverso da zero (LQT), tipici dei sistemi di tipo CAS, in cui il comando di riferimento potrebbe essere un desiderato valore della velocità di beccheggio o del fattore di carico.

Di seguito sono trattate, nei paragrafi 2.2 e 2.3 rispettivamente, l'ottimizzazione LQR e quella LQT mediante retroazione delle uscite mentre, nel paragrafo 2.4 è trattata l'ottimizzazione LQR con retroazione dello stato.

2.2 Regolatore Lineare Quadratico con retroazione delle uscite: LQROF

Si assuma assegnato un sistema LTI descritto in variabili di stato da:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad 2.2\text{-}1$$

Con $x(t) \in \mathbb{R}^n$ si indica il vettore degli stati, con $u(t) \in \mathbb{R}^m$ e il vettore degli ingressi di controllo e con $y(t) \in \mathbb{R}^p$ il vettore delle uscite misurate.
I problemi di regolazione, tipici per caro di controllo SAS, hanno come obbiettivo il raggiungimento della stabilità in ciclo chiuso e il soddisfacimento delle specifiche di prestazione mediante la definizione di un'opportuna legge di controllo $u(t)$.
Di seguito la $u(t)$ verrà assunta come retroazione dell'uscita, senza l'aggiunta di ulteriori termini d'ingresso[4]:

$$u = -Ky \qquad 2.2\text{-}2$$

in cui compare K è la matrice dei guadagni $m \times p$ dei guadagni da determinare.

2.2.1 Indice Quadratico di Prestazione PI per LQROF

Obbiettivo della regolazione sugli stati è guidare a zero ogni condizione iniziale di disturbo, al fine di garantire la stabilità.

[4] Si usa $u = -Ky$ come legge di controllo in luogo $u = -Ky + r$

Tale obbiettivo può essere raggiunto selezionando un ingresso di controllo $u(t)$ che minimizzi una funzione di costo o indice di prestazione definito da:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}Q\boldsymbol{x} + \mathrm{u}^{\mathrm{T}}R\boldsymbol{u})dt \qquad 2.2\text{-}3$$

In cui compaiono le matrici peso Q ed R simmetriche e definite positive.

Una generica matrice M quadrata è detta "*semidefinita positiva*" ($M \geq 0$) se ha tutti i suoi autovalori non negativi e se la forma quadratica $\boldsymbol{x}^T\mathrm{M}\boldsymbol{x}$ è non negativa per ogni $\boldsymbol{x}$.

L'aver assunto Q ed R semidefinite positive implica che per com'è definito l'indice da minimizzare J sia non negativo.

Per comprendere l'espressione che definisce J nella 2.3-3, basta osservare quanto segue.

Se esiste una matrice semidefinita positiva M essa può essere scritta tramite la matrice radice $\sqrt{M}$.

$$M = \sqrt{M}^T\sqrt{M}$$

Quindi, posto: $\boldsymbol{x}^T\mathrm{M}\boldsymbol{x}$ e sostituendo ad M l'espressione precedente, si ottiene:

$$\boldsymbol{x}^T\sqrt{M}^T\sqrt{M}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\sqrt{M})^{\boldsymbol{T}}\sqrt{M}\boldsymbol{x} = \left\|\sqrt{M}\boldsymbol{x}\right\|^2$$

In cui si è indicato con $\|v\|$ la norma euclidea del generico vettore v: $\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{T}}v = \|\boldsymbol{v}\|^{\boldsymbol{2}}$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\left\|\sqrt{Q}\boldsymbol{x}\right\|^2 + \left\|\sqrt{R}\boldsymbol{u}\right\|^2\right)dt \qquad 2.2.4$$

L'integrale che definisce l'indice J è esteso all'intervallo di tempo $[0,\infty[$. Se si è in grado di definire una legge di controllo $\boldsymbol{u}(t)$ tale che J assuma un valore finito, minimo, vuol dire che l'integrando $\left(\left\|\sqrt{Q}\boldsymbol{x}\right\|^2 + \left\|\sqrt{R}\boldsymbol{u}\right\|^2\right)$ è nullo sulla maggio parte dell'intervallo d'integrazione.

Entrambe le combinazioni lineari $\sqrt{Q}\boldsymbol{x}(\mathbf{t})$ (degli stati) e $\sqrt{R}\boldsymbol{u}(t)$ (degli ingressi di controllo), devono tendere a zero. In particolare, avendo scelto le matrici Q ed R non singolari[5], se J

[5] Una matrice non negativa è una matrice i cui elementi sono numeri reali non negativi: $a_{ij} \geq 0$.

ammette minimo finito, dovranno tendere a zero il vettore degli stati $\boldsymbol{x}(\mathbf{t})$ e quello degli ingressi di controllo $\boldsymbol{u}(\mathbf{t})$.

Il fatto che J sia limitato garantisce che $\sqrt{Q}\boldsymbol{x}(\mathbf{t})$ e $\sqrt{R}\boldsymbol{u}(t)$ convergano a zero col tempo. Quindi la scelta della 2.3-4 come PI lo rende adatto alla soluzione dei problemi di regolazione, in cui una condizione iniziale diversa da zero, dovuta per esempio a un disturbo, deve essere guidata a zero.

Minimizzare una funzione obbiettivo come quella definita dalla 2.3.3 può essere interpretato come minimizzare l'energia connessa agli stati, senza spendere troppa energia durante il controllo.

I pesi Q ed R possono essere scelti per scambiare le esigenze di avere stati piccoli o ingressi di controllo piccoli e viceversa. Per esempio, affinché $\sqrt{R}\boldsymbol{u}(t)$ tenda a zero, scegliere una matrice R con termini grandi implica necessariamente, che si debbano mantenere piccoli gli ingressi di controllo $\boldsymbol{u}(t)$. Quindi, scegliendo R "grande" si penalizza l'azione di controllo.

D'altra parte per far andare gli stati $\boldsymbol{x}(t)$ rapidamente a zero è necessario che i termini della matrice Q siano grandi.

In fine è bene osservare che la scelta di Q ed R si ripercuote sulla posizione dei poli in ciclo chiuso.

2.2.2 Soluzione del problema LQROF

Dato il sistema lineare descritto dalle 2.2.1, si vuole determinare la matrice dei guadagni Kche definisca la legge di controllo 2.2.2 e che minimizza l'indice di prestazione PI.

Sostituendo l'equazione 2.2.2 nella 2.2.1, si ottiene l'equazione del sistema in ciclo chiuso:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A - BKC)\boldsymbol{x} \equiv A_c\boldsymbol{x} \qquad 2.2.5$$

Considerando che l'uscita dal sistema è $y = Cx$, l'ingresso al sistema 2.2.2 diventa:

$$u = -KCx \qquad 2.2.6$$

Quindi sostituendo la 2.2.6 nella 2.2.3 riportata di seguito

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} Q\boldsymbol{x} + \mathrm{u}^{\mathrm{T}} R\boldsymbol{u})dt$$

si ottiene

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} Q\boldsymbol{x} + K^T C^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} RKC\boldsymbol{x})dt$$

ed infine:

$$J = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}(Q + C^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} RKC)\boldsymbol{x}\, dt \qquad 2.2.7$$

Il problema del progetto del sistema di controllo è determinare la matrice dei guadagni K che minimizza J oggetto al vincolo dinamico rappresentato dalla 2.2.5.

Il problema di ottimizzazione dinamica può essere convertito in un problema equivalente di ottimizzazione statica più semplice da risolvere.

Supponiamo che esista una matrice costante, simmetrica, semidefinita positiva P tale che:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(x^T \mathrm{P} x) = -\boldsymbol{x}^T(Q + C^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} RKC)\boldsymbol{x} \qquad 2.2.8$$

Quindi J può essere definito come:

$$J = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(0)\mathrm{P}x(0) - \tfrac{1}{2}\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}^T(\mathrm{t})\mathrm{P}\boldsymbol{x}(t) \qquad 2.2.9$$

Assumendo che il sistema in ciclo chiuso sia asintoticamente stabile così che $\boldsymbol{x}(t)$ tenda a zero si ottiene:

$$J = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(0)\mathrm{P}\boldsymbol{x}(0) \qquad 2.2.10$$

Se P soddisfa l'equazione 2.2.8 si può scrivere:

$$-\boldsymbol{x}^T(Q + C^T K^T RKC)\boldsymbol{x} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x}) = \dot{\boldsymbol{x}}^T \mathrm{P}x + x^T \mathrm{P}\dot{\boldsymbol{x}} \qquad 2.2.11$$

L'ultimo membro della 2.2.11 può essere sviluppato tramite la 2.2.5

$$\dot{\boldsymbol{x}}^T \mathrm{P}x + x^T \mathrm{P}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}({A_c}^{\boldsymbol{T}} P + P{A_c}^{\boldsymbol{T}})\boldsymbol{x} \qquad 2.2.12$$

A questo punto uguagliando il primo membro della 2.2.11 e l'ultimo della 2.2.12

$$-\boldsymbol{x}^T(Q + C^T K^T RKC)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}(A_c{}^{\boldsymbol{T}}P + PA_c{}^{\boldsymbol{T}})\boldsymbol{x} \qquad 2.2.13$$

Dato che tale equazione vale per ogni condizione iniziale e quindi per ogni traiettoria $\boldsymbol{x}(t)$, è possibile scrivere:

$$g \equiv A_c{}^{\boldsymbol{T}}P + PA_c + C^T K^T RKC + Q = 0 \qquad 2.2.14$$

Quindi, ipotizzando K e Q dati, P è l'incognita dell'equazione. La 2.2.14 è un'equazione matriciale che prende il nome di equazione di *Lyapunov*[6].

Riepilogando: per ogni matrice di chiusura del sistema, se esiste una matrice P simmetrica, semidefinita positiva, che soddisfi l'equazione di Lyapunov e se il sistema in ciclo chiuso è stabile, allora l'indice di costo J è dato in termini di P dall'equazione 2.1.10 riportata di seguito.

$$J = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(0)\mathrm{P}\boldsymbol{x}(0)$$

Questo è un risultato importante in quanto la matrice P $(n \times n)$ non dipende dallo stato.

Data quindi una matrice di chiusura K la matrice P può essere ricavata dall'equazione di *Lyapunov*. Per calcolare l'indice di costo in ciclo chiuso, sotto l'effetto del controllo 2.2.2, sufficiente conoscere la condizione iniziale $\boldsymbol{x}(0)$.

A questo punto è necessario determinare la matrice dei guadagni, K, in grado di minimizzare l'indice di costo.

Sfruttando l'identità: $tr(AB) = tr(BA)$ per ogni matrice A e B quadrate e compatibili. È possibile scrivere la 2.2.10 come:

$$J = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathrm{P}X) \qquad 2.2.15$$

Dove è stata definita la matrice $n \times n$ simmetrica X come:

$$X \equiv x(0)x^T(0) \qquad 2.2.16$$

[6] L'equazione di Lyapunov è un'equazione matriciale simmetrica lineare. L'equazione non cambia prendendo la sua trasposta

In pratica il problema di partenza è stato modificato in un problema *algebrico* equivalente come sintetizzato di seguito.

- PROBLEMA DI PARTENZA: Scelta della matrice K che minimizzi

  $J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \boldsymbol{x^T}(Q + C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}RKC)\boldsymbol{x}\, dt$

  soggetto al vincolo $\dot{\boldsymbol{x}} = (A - BKC)\boldsymbol{x} \equiv A_c\boldsymbol{x}$

  sugli stati

- PROBLEMA EQUIVALENTE: Scelta di K che minimizzi:

  $J = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathrm{P}X)$ soggetto al vincolo

  $g \equiv A_c{}^{\boldsymbol{T}}P + PA_c{}^{\boldsymbol{T}} + C^TK^TRKC + Q = 0$

  Sulla matrice P

Per risolvere il problema equivalente si usa generalmente la tecnica dei *moltiplicatori di Lagange* (Lewis 1986).

$$\mathcal{H} = tr(\mathrm{P}X) + tr(gS) \qquad 2.2.17$$

Nell'equazione 2.2.17 compare la matrice S simmetrica di dimensione $n \times n$ di moltiplicatori Lagrange che ancora deve essere determinata.

A questo punto il problema equivalente di ottimizzazione vincolata, si vuole tradurre in un semplice problema di minimizzazione dell'equazione 2.2.17, senza alcun vincolo.

Per farlo, bisogna calcolare le derivate parziali di $\mathcal{H}$, rispetto a tutte le variabili indipendenti: P, S e K , e porle uguali a zero. Usando inoltre il fatto che per ogni matrice, A B e C di dimensioni opportune e per ogni scalare y, valgono le relazioni:

$$\frac{\partial}{\partial B} tr(ABC) = A^T C^T$$

$$\frac{\partial y}{\partial B^T} = \left[\frac{\partial y}{\partial B}\right]^T$$

La condizione necessaria per la soluzione del problema LQROF è data dalla soluzione del sistema:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S} = g = A_c^T P + PA_c + C^T K^T RKC + Q \qquad 2.2.18$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} = A_c S + S A_c^T + X \qquad 2.2.19$$

$$0 = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = RKCSC^T - B^T PSC^T \qquad 2.2.20$$

Le prime due equazioni sono equazioni di Lyapunov mentre l'ultima equazione è quella che fornisce la matrice dei guadagni in ciclo chiuso.
Quindi se R è definita positiva e CSC^T non è singolare, la 2.2.20 può essere risolta rispetto K.

$$K = R^{-1}B^T PSC^T (CSC^T)^{-1} \qquad 2.2.21$$

La dipendenza di X dalle condizioni iniziali $x(0)$, è un fatto svantaggioso, perché vuol dire anche la matrice dei guadagni ottimi dipende dagli stati iniziali. In molti casi pratici, gli stati iniziali $x(0)$ non sono noti. Tale dipendenza di K da $x(0)$ è tipica del LQR con retroazione delle uscite misurabili, come si vedrà nel paragrafo 2.4, nel caso di retroazione dello stato, ciò non avviene.
Per ovviare al problema della dipendenza dallo stato iniziale, è possibile ricorrere all'aspettazione dell'indice J: $E\{J\}$, quindi le 2.2-10 e la 2.2-16 possono essere riscritte come:

$$E\{J\} = \frac{1}{2}E\{\boldsymbol{x}^T(0)P\boldsymbol{x}(0)\} = \frac{1}{2}tr(PX) \qquad 2.2\text{-}22$$

Dove la matrice $n \times n$

$$X = E\{x^T(0)x(0)\} \qquad 2.2\text{-}23$$

è l'autocorrelazione tra gli stati iniziali.
Normalmente $\boldsymbol{x}(0)$ si assume incognito nelle sue componenti ma si assume nota solo la sua distribuzione su una superficie assegnata, descritta dalla matrice X avente norma euclidea congruente al problema.
Per il problema LQROF, affinché la soluzione sia indipendente dalle condizioni iniziali, si suppone che il vettore $\boldsymbol{x}(0)$ segua una distribuzione statistica a valore medio nullo con norma euclidea unitaria. In quest'ipotesi, $X = x^T(0)x(0) = I$, con I matrice identità, descrive una superficie sferica di raggio unitario.
Di seguito, in tabella 2.1, sono riportate le equazioni per la soluzione del metodo.

2.1 Equazioni per la soluzione del problema di regolazione LQROF

Modello del Sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Control

$$u = -Ky = -KCx$$

Indice di Prestazione (PI)

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \boldsymbol{x^T}(Q + C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}RKC)\boldsymbol{x}\, dt \qquad \text{con} \quad \mathrm{Q} \geq 0, \quad \mathrm{R} \geq 0$$

Equazioni di Ottimizzazione

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S} = A_c^T P + PA_c + Q + C^T K^T RKC = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} = A_c S + SA_c^T + X = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial K} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = RKCSC^T - B^T PSC^T = 0$$

$$dalla\ precedente \ \Rightarrow K = R^{-1}B^T PSC^T (CSC^T)^{-1}$$

dove

$$A_c = A - BKC$$

Indice di Prestazione Ottimo

$$J = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathrm{P}X) \qquad \text{con} \qquad X = x(0)x^T(0)$$

2.2.3 Calcolcolo della matrice dei guadagni de sistema nel caso LQROF

Il sistema che permette di ricavare P, S e la matrice dei guadagni K è un sistema di equazioni matriciali non lineari in tre incognite. Per la soluzione si ricava a tecniche numeriche consolidate.

Ci sono varie tecniche numeriche atte a determinare la matrice dei guadagni di ottimo, ad esempio l'algoritmo SIMPLEX [8] oppure la soluzione presentata in [9] basata su una procedura iterativa.

Un altro approccio per la soluzione del problema è basato sui "metodi ai gradienti" che in genere ha il vantaggio di andare convergenza in modo rapido. Un esempio di applicazione del metodo è l'algoritmo di Davidon-Fletcher-Powell [4] che, nel presente lavoro, è stato implementato in Matlab® (app B) al fine di ottenere la sintesi del sistema di controllo descritto nel terzo capitolo.

Per determinare la matrice dei gradienti attraverso un algoritmo di minimizzazione basato sul metodo ai gradienti è necessario poter calcolare per ogni valore di K, l'indice di prestazione J e la derivata parziale $\partial J/\partial K$.

Quella che segue è una breve descrizione dell'algoritmo utilizzato:

1. Si sceglie una matrice dei guadagni iniziali tale che il sistema in ciclo chiuso $\dot{\boldsymbol{x}} = A_c\boldsymbol{x}$ risulti stabile
2. Si risolvono le equazioni di Lyapunov ricavando le matrici ausiliari S e P
3. Aggiornamento della matrice dei guadagni tramite l'equazione 2.2.20:

$$\frac{\partial J}{\partial K} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = RKCSC^T - B^TPSC^T = 0$$

Si ricorda che la matrice simmetrica $P > 0$ è tale per cui la 2.3.17 si annulli, quindi $g = 0$.

Di conseguenza la 2.3.16 diventa $\mathcal{H} = tr(\mathrm{P}X)$ ed essendo $J = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathrm{P}X)$ valgono le relazioni:

$$J = \frac{1}{2}\mathcal{H}$$

$$\frac{\partial J}{\partial K} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K}$$

2.2.4 Struttura della matrice dei pesi

Per la convergenza dell'algoritmo è necessario verificare una serie di punti:

1. L'esistenza di una matrice dei guadagni K in grado di stabilizzare il sistema in ciclo chiuso
2. La matrice delle uscite deve avere rango massimo: $rank(C) = p$
3. La matrice dei pesi sui controlli R dev'essere definita positiva. Questo significa che tutti gli ingressi di controllo devono essere pesati nell'indice PI

4. La matrice Q deve essere semidefinita positiva $(\sqrt{Q}, A)$ deve essere "*rilevabile*". Cioè la matrice di osservabilità $O(s) = \begin{bmatrix} sI - A \\ -\sqrt{Q} \end{bmatrix}$ deve avere rango pieno n per ogni valore della variabile complessa $s$appartenente al semipiano complesso negativo [Kailath, 1980].

Se queste condizioni sono rispettate la matrice dei guadagni determinata con la retroazione delle uscite stabilizza il sistema e minimizza l'indice PI.

La condizione di rilevabilità significa che qualunque modo instabile del sistema sia osservabile nell'indice di prestazione e quindi se l'algoritmo di ottimizzazione converge ad un valore finito, i segnali associati ai modi instabili si saranno necessariamente azzerati.

In pratica la rilevabilità dei sistemi lineari è una proprietà strutturale più debole dell'osservabilità, in quanto richiede che gli autovalori non osservabili siano asintoticamente stabili. Pur essendo una condizione più debole dell'osservabilità risulta più difficile da verificare per cui, in genere, si preferisce imporre l'osservabilità di $(\sqrt{Q}, A)$, proprietà più stringente ma facilmente verificabile, di cui la rilevabilità è conseguenza.

Condizione sufficiente affinché $(\sqrt{Q}, A)$ sia osservabile è che la matrice di osservabilità, definita dalla 2.2.24 abbia rango pieno n.

$$O \equiv \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ \sqrt{Q}A \\ . \\ . \\ \sqrt{Q}A^{n-1} \end{bmatrix} \qquad 2.2\text{-}24$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché la matrice di osservabilità abbi rango pieno n è che il graamiano di osservabilità $O^T O$ sia non singolar.

Il graamiano $O^T O$ è una matrice $n \times n$ ed il suo determinante è facilmente calcolabile in Matlab®.

È importante osservare che, da un unto di vista numerico, l'osservabilità di $(\sqrt{Q}, A)$ garantisce l'esistenza di una soluzione definita positiva alla 2.2.18.

Se $(\sqrt{Q}, A)$ non fosse osservabile P potrebbe essere singolare per cui alcuni degli elementi K_{ij} potrebbero essere nulli con la conseguenza che i corrispondenti anelli di retroazione non verrebbero chiusi.

La scelta delle matrici dei pesi è quindi una delle fasi cruciali del metodo. Un esempio pratico può aiutare a comprendere i criteri da seguire per scegliere gli elementi che le compongono.
Si supponga che il sistema abbia un'uscita di prestazione definita come:

$$\boldsymbol{z} = H\boldsymbol{x} \qquad 2.2\text{-}25$$

e che la si voglia mantenere piccola in ciclo chiuso.
L'uscita di prestazione può essere contenuta applicando il il metodo LQR usando come indice di prestazione J definito come:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{z} + \mathbf{u}^{\mathrm{T}} R\boldsymbol{u})dt \qquad 2.2\text{-}26$$

in tal caso, sfruttando la 2.2-25, la matrice Q risulta automaticamente definita come: $Q = H^{\boldsymbol{T}}H$.

Di seguito sono riportate delle linee guida per la scelta delle matrici Q ed R tratte da [10].
Supponiamo di aver definito l'uscita di prestazione così che H risulti definita. Si consideri inoltre il seguente indice di prestazione:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{T}}\bar{Q}\boldsymbol{z} + \mathbf{u}^{\mathrm{T}} R\boldsymbol{u})dt \qquad 2.2\text{-}27$$

In tal caso, sfruttando la 2.2-25 si ottiene: $Q = H^{\boldsymbol{T}}\bar{Q}H$. Per determinare la matrice $\bar{Q}$ si può mettere in conto le massime deviazioni ammissibili per l'uscita di prestazione e per gli ingressi di controllo. Definite e z_{iM} e u_{iM} la massime deviazioni, sulle componenti di $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{u}$ le matrici peso possono essere definite come $\bar{Q} = diag\{q_i\}$ e $R = diag\{r_i\}$ avente rispettivamente i seguenti termini sulla diagonale: $q_i = \frac{1}{z^2{}_{iM}}$ e $r_i = \frac{1}{r^2{}_{iM}}$. Tale scelta è comprensibile considerando che se sono ammesse piccole variazioni z_{iM} e u_{iM} i rispettivi pesi : q_i e r_i devono essere grandi.
Altre considerazioni vanno fatte sulla scelta della matrice dei guadagni iniziale necessaria ad avviare la procedura descritta.

2.3 Controllo LQ per l'inseguimento di un comando LQTOF

L'azione dei sistemi di controllo non si limita a mantenere a zero gli stati com'è nel caso del regolatore, spesso si è interessati all'inseguimento di un segnale di comando diverso zero.
L'inseguimento di un segnale di riferimento è un problema importante in un "Command Augmentation System" (CAS), dove il comando di riferimento può essere un determinata velocità di beccheggio o l'accelerazione normale.
Si consideri la figura 2.1. Lo schema aggiunge al caso classico di retroazione dell'uscita, un anello esterno a guadagno unitario che riporta al nodo comparatore con l'ingresso, il segnale dell'uscita detta "di prestazione". La differenza tra il segnale d'ingresso di riferimento e l'uscita di prestazione determinano l'errore d'inseguimento, il quale deve essere mantenuto il più piccolo possibile.
Lo schema può contenere un compensatore dinamico di qualsiasi struttura, come un filtro di washout o un integratore

2.3.1 Inseguitore con compensatore avente una struttura assegnata

La struttura dei compensatori normalmente usati per il controllo classico, offre vantaggi in termini di robustezza per il sistema, permettendogli di raggiungere buone prestazioni anche in presenza di disturbi. Per non perdere tali vantaggi, l'approccio seguito, conduce alla sintesi di un sistema di controllo il cui compensatore abbia una struttura assegnata dal progettista. Le matrici dei guadagni L e Q da ricavare mirano a minimizzare un indice di prestazione quadratico esteso all'intero sistema velivolo-compensatore.
Si consideri noto il modello del velivolo descritto dalle equazioni 2.2.1 e riportato di seguito

$$\dot{x} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}$$

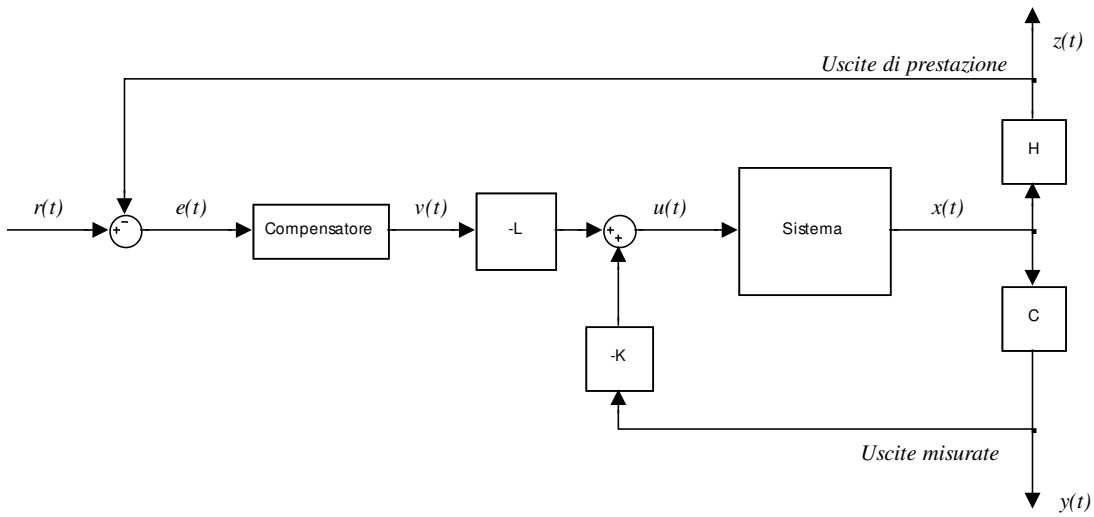


Figura 2.1 Schema in variabili di stato per il metodo LQTOF

È identificata come "uscita di prestazione", l'uscita che deve inseguire il segnale di riferimento. Come si vede dalla figura 2.1:

$$\boldsymbol{z} = H\boldsymbol{x} \qquad 2.3\text{-}1$$

In generale l'uscita di prestazione $\boldsymbol{z}(t)$, non coincide con l'uscita del sistema $\boldsymbol{y}(t)$.

È importante osservare che per un perfetto inseguimento del riferimento è necessario disporre di un vettore di controllo $\boldsymbol{u}$ con molte componenti.

Il blocco "compensatore" può essere un sistema dinamico il cui modello in variabili di stato è riportato di seguito:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{w}} = F\boldsymbol{w} + G\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{v} = D\boldsymbol{w} + J\boldsymbol{e} \end{cases} \qquad 2.3\text{-}2$$

$w(t)$ e $v(t)$ rappresentano rispettivamente il vettore degli stati e il vettore delle uscite. Il vettore degli ingressi al compensatore è rappresentato dall'errore tra il riferimento e le uscite di prestazione:

$$\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{z}(t) \qquad 2.3\text{-}3$$

Le matrici F, G, D e J sono matrici note che includono la struttura del compensatore desiderato.

Sotto queste condizioni, il vettore di controllo $\boldsymbol{u}(t)$ è esprimibile come:

$$\boldsymbol{u}(t) = -K\boldsymbol{y}(t) - L\boldsymbol{v}(t) \qquad 2.3\text{-}4$$

A questo punto è possibile mettere insieme, in forma compatta, sia le equazioni della dinamica del velivolo e del compensatore sia i vettori delle uscite.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{w}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A & 0\\ -GH & F\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{w}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u} + \begin{bmatrix}0\\ G\end{bmatrix}\boldsymbol{r} \qquad 2.3\text{-}5$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}C & 0\\ -JH & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{w}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ J\end{bmatrix}\boldsymbol{r} \qquad 2.3\text{-}6$$

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix}H & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{w}\end{bmatrix} \qquad 2.3\text{-}7$$

Gli ingressi di controllo possono essere scritti come:

$$\boldsymbol{u} = -\begin{bmatrix}K & L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix} \qquad 2.3\text{-}8$$

Considerando il sistema espanso Velivolo/Compensatore, il controllo con retroazione delle uscito è determinato attraverso la matrice $[K \quad L]$.
Nel modello espanso, tutte le matrici sono note eccetto le matrici K e L soluzione dell'ottimizzazione dell'indice di prestazione.

2.3.2 Formulazione del problema LQTOF

Per snellire la notazione, il vettore degli stati, quello delle uscite e degli ingressi, nonché le matrici del velivolo e del compensatore, possono essere arrangiati in modo da ottenere le equazioni della dinamica del sistema ampliato:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} + G\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} + F\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{z} = H\boldsymbol{x}\end{cases} \qquad 2.3\text{-}9$$

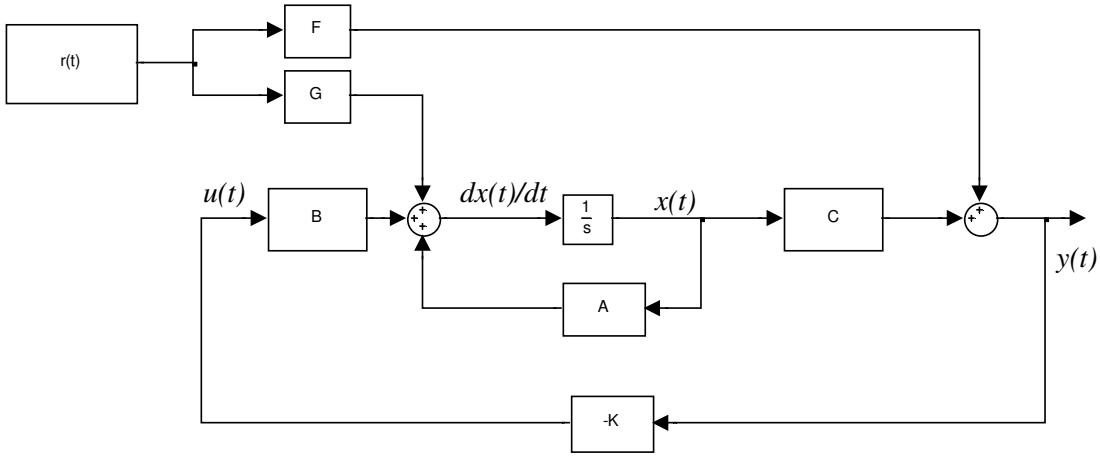


Figura 2.2 Rappresentazione in variabili di stato della dinamica del sistema e del compensatore

In questa descrizione $x(t) \in \mathbb{R}^n$, il vettore degli ingressi di controllo $u(t) \in \mathbb{R}^m$, l'ingresso di riferimento $r(t) \in \mathbb{R}^q$, l'uscita di prestazione $z(t) \in \mathbb{R}^q$ e il vettore delle uscite misurate $y(t) \in \mathbb{R}^p$.

La legge di controllo del sistema è proporzionale alle uscite misurabili retroazionate:

$$\boldsymbol{u}(t) = -K\boldsymbol{y} = -KC\boldsymbol{x} - KF\boldsymbol{r} \qquad 2.3\text{-}10$$

K è la matrice costante di dimensione $(m \times p)$ di guadagni da determinare. La $u(t)$ espressa dalla 2.3.8 permette il calcolo simultaneo di tutti i guadagni della catena di controllo, sia quelli diretti (come quelli della matrice L), sia quelli della retroazione vera e propria K.

Usando le equazioni 2.3.9 e 2.3.10, sistema in ciclo chiuso è rappresentato da:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A - BKC)\boldsymbol{x} + (G - BKF)\boldsymbol{r} = A_c\boldsymbol{x} + B_c\,\boldsymbol{r} \qquad 2.3\text{-}11$$

Di seguito si darà per scontato che la dinamica del compensatore, se presente, sarà inclusa nel sistema.

Tale trattazione differisce da quella tradizionale. In aggiunta alla retroazione, permette di considerare i rami in "feedforward". Ciò implica che la matrice dei guadagni oltre ai poli in ciclo chiuso possa influenzare anche gli zeri del compensatore.

Poiché le risposte d'interesse per i sistemi aeronautici sono quelle classiche dei sistemi lineari, in modo particolare le risposte al gradino ed all'impulso che forniscono le caratteristiche

transitorie e a regime del sistema, sarà considerato d'ora in avanti quale segnale di riferimento, un gradino d'intensità r_0.
Nei paragrafi seguenti è esposta la formulazione del problema dell'inseguimento di un segnale di riferimento, che porta al calcolo della matrice di controllo K.

2.3.3 Sistema delle deviazioni

Per affrontare il problema, si applica il metodo LQR al sistema delle deviazioni.
Il sistema delle deviazioni, indicato con la tilde $(\tilde{\ldots})$, è definito dalla differenza tra le variabili al tempo (t) e le medesime in condizioni stazionarie ,indicate con una barra di soprassegno $(\bar{\ldots})$.
Quindi le deviazioni dello stato, delle uscite, e del vettore di controllo sono espresse come segue:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \bar{\boldsymbol{x}} \qquad 2.3\text{-}12$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \bar{\boldsymbol{y}} = C\tilde{\boldsymbol{x}} \qquad 2.3\text{-}13$$

$$\tilde{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{z}(t) - \bar{\boldsymbol{z}} = H\tilde{\boldsymbol{x}} \qquad 2.3\text{-}14$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{u}(t) - \bar{\boldsymbol{u}} = -KC\boldsymbol{x} - KF\boldsymbol{r}_0 - (-KC\bar{x} - KF\boldsymbol{r}_0) = -KC\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \qquad 2.3\text{-}15$$

L'ultima equazione, sfruttando la 2.3-13 può essere scritta come $\tilde{\boldsymbol{u}} = -K\tilde{\boldsymbol{y}}$
L'errore dell'uscita di prestazione, rispetto all'ingresso da seguire è dato dall'equazione

$$\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{z}(t) \qquad 2.3\text{-}16$$

D'altra parte sfruttando il concetto di deviazione, può essere espresso dalla 2.3-17

$$\boldsymbol{e}(t) = \tilde{\boldsymbol{e}}(t) + \bar{e} \qquad 2.3\text{-}17$$

L'errore nel sistema delle deviazioni quindi è:

$$\tilde{\boldsymbol{e}}(t) = \boldsymbol{e}(t) - \bar{\boldsymbol{e}} = (\boldsymbol{r_0} - H_x) - (\boldsymbol{r}_0 - H\bar{\boldsymbol{x}}) = -H\tilde{\boldsymbol{x}} \qquad 2.3\text{-}18$$

Considerano il primo membro e il secondo dell'ultima uguaglianza delle 2.3-18, tenendo conto della 2.3-14 si giunge alla 2.3-19.

$$\tilde{\boldsymbol{e}} = -\tilde{\boldsymbol{z}} \qquad 2.3\text{-}19$$

Requisito necessario del sistema in ciclo chiuso è che sia asintoticamente stabile, A_c non deve essere singolare. Ciò vuol dire che a regime deve valere $\dot{x} = 0$, e ciò implica che la 2.3-11 diventi:

$$0 = A_c\overline{\boldsymbol{x}} + B_c\boldsymbol{r_0} \qquad 2.3\text{-}20$$

Dalla 2.3-20 è possibile risalire alla risposta in condizioni stazionarie data da:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = -A_c^{-1}B_c\boldsymbol{r_0} \qquad 2.3\text{-}21$$

L'errore in condizioni stazionarie è quindi:

$$\overline{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{r_0} - H\overline{\boldsymbol{x}} = (I + HA_c^{-1}B_c)\boldsymbol{r_0} \qquad 2.3\text{-}22$$

Per quanto visto nel paragrafo precedente la 2.4-11 per ingresso a gradino di ampiezza $\boldsymbol{r_0}$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A_c\boldsymbol{x} + B_c\,\boldsymbol{r_0}$$

Sostituendo ad $\boldsymbol{x}$ la sua espressione ricavata dalla 2.3-12

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = A_c(\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \overline{\boldsymbol{x}}\ ) + B_c\,\boldsymbol{r_0}$$

Al posto di $\overline{\boldsymbol{x}}$ si può sostituire la sua espressione data dalla 2.3-21 ottenendo la seguente equazione:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = A_c(\tilde{\boldsymbol{x}}(t) - A_c^{-1}B_c\boldsymbol{r_0}\ ) + B_c\,\boldsymbol{r_0} = A_c\tilde{\boldsymbol{x}}(t) - B_c\boldsymbol{r_0} + B_c\,\boldsymbol{r_0} = A_c\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$$

Che può essere sintetizzata come nella 2.3-23

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = A_c\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \qquad 2.3\text{-}23$$

Equazione che esprime la dinamica, in ciclo chiuso, del sistema delle deviazioni.
Per il sistema delle deviazioni vale dunque:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = A_c\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \qquad 2.3\text{-}24$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(t) = C\tilde{\boldsymbol{x}} \qquad 2.3\text{-}25$$

$$\tilde{\boldsymbol{z}}(\mathrm{t}) = H\tilde{\boldsymbol{x}} = -\tilde{\boldsymbol{e}}(t) \qquad 2.3\text{-}26$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(t) = -K\tilde{\boldsymbol{y}} \qquad 2.3\text{-}27$$

Sostituendo ancora nel sistema, A_c con la sua espressione e considerando inoltre le equazioni 2.3-25 e 2.3-27, l'equazione 2.3-24 diventa:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = (A - BKC)\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = A\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + B\tilde{\boldsymbol{u}}$$

In conclusione il modello completo della dinamica delle deviazioni è riportato di seguito:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = A\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + B\tilde{\boldsymbol{u}} \qquad 2.3\text{-}28$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(t) = C\tilde{\boldsymbol{x}} \qquad 2.3\text{-}29$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(t) = -K\tilde{\boldsymbol{y}} \qquad 2.3\text{-}30$$

Tale sistema è del tutto analogo al sistema 2.2-1. Si può concludere pertanto che il problema della sintesi di un sistema di controllo ottimo che permetta l'inseguimento di un segnale di riferimento (gradino di ampiezza assegnata), è equivalente al problema del *regolatore* ottimo applicato al sistema delle deviazioni.

2.3.4 Indice di Prestazione (PI)

Inseguire un segnale di riferimento e quindi rendere l'errore $\boldsymbol{e}(t) = \tilde{\boldsymbol{e}}(t) + \bar{e}$ il più piccolo possibile, è equivalente a risolvere i due problemi:

1. Applicare il problema di regolazione relativo all'errore $\tilde{\boldsymbol{e}} = -\tilde{\boldsymbol{z}}$
2. Rendere l'errore a regime $\bar{e}$ il più piccolo possibile

Per risolvere entrambe i problemi, bisogna determinare la matrice dei guadagni K che minimizza l'indice di prestazione PI definito come segue:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(\tilde{e}^T\tilde{e} + \tilde{u}^T R\tilde{u})dt + \frac{1}{2}\bar{e}^T V\bar{e} \qquad 2.3\text{-}31$$

Con $R > 0$ e $V \geq 0$ matrici peso rispettivamente per il vettore della deviazione sul controllo e per l'errore a regime . L'integrando è l'indice quadratico da minimizzare.

Se il sistema da controllare è di tipo I[7], la matrice V può essere nulla dato che l'errore a regime andrà automaticamente a zero.

Rendendo piccolo il più possibile la deviazione $\tilde{e}$, migliora la risposta durante il transitorio, mentre, rendendo $\bar{e}$ più piccolo possibile, si ottengono buone prestazioni in condizioni stazionarie. Se il sistema è di tipo 0, è necessario portare a termine una sintesi di compromesso tra le diverse esigenze.

Per calibrare bene gli elementi delle matrici dei pesi, in modo da ottenere una risposta nel tempo che soddisfi i requisiti, è spesso necessario procedere per tentativi e reiterare più volte il procedimento. In genere si potranno scegliere: $R = rI$ e $V = vI$, con r e v scalari.

Tale scelta semplifica notevolmente il problema dato che sono stati ridotti drasticamente i parametri da variare.

Nell'equazione 2.3-31, l'errore quadratico, è espresso da $\tilde{e}^T\tilde{e}$. Per la per l'ultima equazione 2.3-26 si puo scrivere la relazione:

$$\boldsymbol{\tilde{e}}^T\boldsymbol{\tilde{e}} = \boldsymbol{\tilde{x}}^T H^T H\, \boldsymbol{\tilde{x}} \qquad 2.3\text{-}32$$

Dalla precedente equazione, ponendo:

$$H^T H = Q \qquad 2.3\text{-}33$$

la 2.3-32 diventa:

$$\boldsymbol{\tilde{e}}^T\boldsymbol{\tilde{e}} = \boldsymbol{\tilde{x}}^T Q\, \boldsymbol{\tilde{x}} \qquad 2.3\text{-}34$$

e l'indice di prestazione per sistemi di tipo I, per i quali $V = 0$, ritrova esattamente la stessa forma 2.3-3

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(\boldsymbol{\tilde{x}}^T Q\, \boldsymbol{\tilde{x}} + \boldsymbol{\tilde{u}}^T R\boldsymbol{\tilde{u}})dt \qquad 2.3\text{-}35$$

[7] Presenta un integratore sul ramo feedforwad

Q è la matrice che pesa la deviazione dello stato ed a questo punto è nota dato che lo è H.

Il problema che rimane da risolvere è la determinazione della matrice K in grado di minimizzare l'indice di prestazione J.

2.3.5 Soluzione del problema LQTOF

Per risolvere il problema si può procedere come nel paragrafo 2.3.2

Mediante le equazioni 2.3-24-2.3-27, si dimostra [3] che l'indice di prestazione da soddisfare è esprimibile come:

$$J = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{x}}(0)^T P\tilde{\boldsymbol{x}}(0) + \frac{1}{2}\bar{e}^T V\bar{e} \qquad 2.3\text{-}36$$

Con P matrice semidefinita positiva soluzione dell'equazione di Lyapunov

$$g \equiv A_c{}^{\boldsymbol{T}}P + PA_c + Q + C^T K^T RKC = 0 \qquad 2.3\text{-}37$$

Nell'equazione 2.3-36 $\bar{e}$ è definita dalla 2.3-38

$$\bar{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{r_0} - H\bar{\boldsymbol{x}} = (I + HA_c^{-1}B_c)\boldsymbol{r_0} \qquad 2.3\text{-}38$$

Mentre nella 2.3-37 $Q = H^T H$.

Nel caso del metodo LQR, si assume che le condizioni iniziali siano uniformemente distribuite su una superficie sferica di caratteristiche note. In tal caso questa assunzione non è valida. In quest'ultima situazione, il sistema parte da una situazione iniziale di equilibrio e deve raggiungere un valore finale che dipende dall'ingresso di riferimento.

Per determinare il corretto valore di $\tilde{\boldsymbol{x}}(0)$, considerando che il sistema parte da una condizione di riposo, $\boldsymbol{x}(0) = 0$, dalla 2.3-12 si ottiene:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(0) = -\bar{\boldsymbol{x}} \qquad 2.3\text{-}39$$

L'indice di prestazione diventa quindi:

$$J = \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{x}}^T P\bar{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}\bar{e}^T V\bar{e} = \frac{1}{2}tr(PX) + \frac{1}{2}\bar{e}^T V\bar{e} \qquad 2.3\text{-}40$$

Sfruttando la 2.3-21

$$X = \bar{\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{x}}^T = A_c^{-1}B_c\boldsymbol{r_0}\boldsymbol{r_0}^{\boldsymbol{T}}B_c{}^{\boldsymbol{T}}A_c^{-1\boldsymbol{T}} \qquad 2.3\text{-}41$$

La soluzione del problema dell'inseguimento di un ingresso a gradino, partendo da una condizione di riposo, è ottenuta minimizzando l'indice J rispetto alla matrice dei guadagni K. Di seguito in tabella 2.2 sono riportate le equazioni da usare per risolvere il problema LQTOF

2.2 Equazioni per la soluzione del problema di inseguimento di un segnale di riferimento LQTOF

Modello del Sistema

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} + G\boldsymbol{r}$$
$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} + F\boldsymbol{r}$$
$$\boldsymbol{z} = H\boldsymbol{x}$$

Controllo

$$u = -Ky = -KCx$$

Indice di Prestazione (PI)

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\tilde{\boldsymbol{x}}^T Q\, \tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{u}}^T R \tilde{\boldsymbol{u}})dt + \frac{1}{2}\bar{e}^T V \bar{e} \qquad \text{con } Q = H^T H,$$

Equazioni di Ottimizzazione

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S} = A_c^T P + P A_c + Q + C^T K^T R K C = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} = A_c S + S A_c^T + X = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = RKCSC^T - B^T PSC^T + B^T A_c^{-1\boldsymbol{T}}(P + H^T V H)\overline{\boldsymbol{x}}\overline{\boldsymbol{x}}^T - \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}} A_c^{-1\boldsymbol{T}} H^T V \boldsymbol{r_0}\overline{\boldsymbol{y}}^T = 0$$

Per ingresso a gradino di ampiezza $\boldsymbol{r_0}$

$$\overline{\boldsymbol{x}} = -A_c^{-1} B_c \boldsymbol{r_0}$$

$$\overline{\boldsymbol{y}} = C\overline{\boldsymbol{x}} + F\boldsymbol{r_0}$$

$$X = \overline{\boldsymbol{x}}\overline{\boldsymbol{x}}^T = A_c^{-1} B_c \boldsymbol{r_0}\boldsymbol{r_0}^{\boldsymbol{T}} B_c^{\boldsymbol{T}} A_c^{-1\boldsymbol{T}}$$

dove

$$A_c = A - BKC \qquad\qquad B_c = G - BKF$$

Indice di Prestazione Ottimo

$$J = \frac{1}{2} tr(PX) + \frac{1}{2}\bar{e}^T V \bar{e}$$

2.4 Regolatore Lineare Quadratico con Retroazione dello Stato LQR

Nei paragrafi precedenti sono stati esaminati metodi di ottimizzazione lineare quadratica basata sulla retroazione delle uscite misurate, al fine di risolvere sia il problema della regolazione, che quello dell'inseguimento di un segnale di riferimento. La retroazione delle

uscite si è rivelata una tecnica di sintesi molto utile e versatile, poiché offre la possibilità di includere nel progetto compensatori dinamici di varia struttura.
Per completezza di esposizione si tratterà anche il caso della retroazione dello stato.
Si assuma dato un sistema LTI descritto in variabili di stato da:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = -Kx \end{cases} \qquad 2.4\text{-}1$$

Con $x(t) \in \mathbb{R}^n$ si indica il vettore degli stati, con $u(t) \in \mathbb{R}^m$ il vettore degli ingressi di controllo e con $y(t) \in \mathbb{R}^p$ il vettore delle uscite misurate.

$$u = -Kx \qquad 2.4\text{-}2$$

K è la matrice dei guadagni $m \times n$ dei guadagni da determinare.
Sostituendo l'equazione 2.4-2 nella 2.4-1, si ottiene l'equazione del sistema in ciclo chiuso:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A - BK)\boldsymbol{x} \equiv A_c\boldsymbol{x} \qquad 2.4\text{-}3$$

Nei paragrafi precedenti, le uscite misurabili del son state rappresentate come:

$$y = Cx \qquad 2.4\text{-}4$$

e la legge di controllo è stata definita come:

$$u = -Ky = -KCx \qquad 2.4\text{-}5$$

Considerando la legge del controllo definita dalla 2.4-2, la retroazione totale dello stato può essere vista come un caso particolare della retroazione delle uscite in cui:

$$C = I \qquad 2.4\text{-}6$$

Sebbene in campo aeronautico lo stato sia raramente disponibile, ci sono dei vantaggi notevoli in tale metodo.

Quanto visto nei precedenti paragrafi può essere applicato anche nel caso di retroazione dello stato, ponendo $C = I$. Di seguito saranno esaminate le semplificazioni che derivano dall'applicazione della retroazione dello stato.

Per portare a zero l'uscita di prestazione:

$$z = Hx \qquad 2.4\text{-}7$$

Si sceglie un indice di prestazione PI

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \mathrm{u}^\mathrm{T} R\boldsymbol{u})dt \qquad 2.4\text{-}8$$

Con $Q = H^T H \geq 0$ e $R > 0$.

La matrice dei guadagni K che minimizza l'indice di prestazione può essere calcolata applicando le equazioni riportate nella tabella 2.1 di seguito, ponendo $C = I$:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S} = A_c^T P + PA_c + Q + K^T RK = 0 \qquad 2.4\text{-}9$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} = A_c S + SA_c^T + X = 0 \qquad 2.4\text{-}10$$

$$\frac{\partial J}{\partial K} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\delta K} = RKS - B^T PS = 0 \qquad 2.4\text{-}11$$

$$K = R^{-1}B^T PSS^{-1} \qquad 2.4\text{-}12$$

In fine la matrice dei guadagni è data da:

$$K = R^{-1}B^T P \qquad 2.4\text{-}13$$

In conclusione, per determinare la matrice dei guadagni ottimi che risolve il problema della retroazione dello stato, non è più necessario risolvere l'equazione 2.4-10. Ciò vuol dire che non è più necessario fissare la dipendenza del metodo dalle condizioni iniziali attraverso la matrice X. La matrice dei guadagni K così definite è nota come di matrice di Kalman.

Dall'equazione 2.4-13 e dalla 2.4-9, si ottiene la 2.4-14:

$$A_c^T P + PA_c + Q + PBR^{-1}B^T P = 0 \qquad 2.4\text{-}14$$

Considerando l'espressione A_c e la 2.4-14 si ottiene:

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) + Q + PBR^{-1}B^T P = 0 \qquad 2.4\text{-}15$$

Sostituendo ancora la 2.4-13 nella 2.4-15 si ottiene:

$$(A - BR^{-1}B^T P)^T P + P(A - BR^{-1}B^T P) + Q + PBR^{-1}B^T P = 0 \qquad 2.4\text{-}16$$

Si giunge all'equazione matriciale algebrica 2.4-15 nota come: equazione algebrica di Riccati (ARE)

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \qquad 2.4\text{-}17$$

L'equazione 2.4-15 è del tutto equivalente alla sua trasposta, quindi la soluzione P è una matrice simmetrica $P = P^T$.

Nel caso di retroazione dello stato, non è più necessario riferirsi all'aspettazione dell'indice di prestazione $E\{J\} = \frac{1}{2}E\{\boldsymbol{x}^T(0)P\boldsymbol{x}(0)\}$ come visto nel paragrafo 2.2.2 lo si può calcolare direttamente come:

$$J = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(0)P\boldsymbol{x}(0) \qquad 2.4\text{-}18$$

In conclusione, per la determinazione della matrice P, l'aver imposto la retroazione dello stato come $C = I$, ha permesso di sostituire un sistema di tre equazioni matriciali accoppiate, con un'equazione matriciale non lineare. Il vantaggio è legato al fatto che per la soluzione dell'equazione di Riccati, esiste una varietà di metodi, tra cui uno implementato in Matlab® [11].

Le equazioni per la soluzione del problema LQR con retroazione dello stato, sono riportate in tabella 2-3.

2.3 Equazioni per la soluzione LQR con retroazione dello stato

Modello del Sistema

$\dot{x} = Ax + Bu$

Equazione di controllo

$u = -Kx$

Indice di Prestazione (PI)

$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + Q + u^{\mathrm{T}} Ru)dt$ con $\mathrm{Q} \geq 0$, $\mathrm{R} \geq 0$

Equazioni di Ottimizzazione: Equazioni Algebrica di Riccati (ARE)

$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$

Guadagni di Kalman

$K = R^{-1}B^T P$

Indice di Prestazione Ottimo

$J = \frac{1}{2}x^T(0)\,\mathrm{P}x^T(0)$

2.5 Scelta dei guadagni iniziali

Come visto è necessario determinare all'inizio della procedura iterativa, una matrice di guadagni K_0 in grado di stabilizzare il sistema in ciclo chiuso ($A_c = A - BKC$ deve avere autovalori a parte reale negative).

Esistono diversi modi per fissare i guadagni iniziali.

Un modo semplice è fissare solo il segno che dovrebbero avere i guadagni di ogni ramo in retroazione unitaria.

Si potrebbe anche procedere determinando la matrice dei guadagni ottenuti come retroazione dell'intero vettore dello stato. Data la matrice dinamica A e la matrice di controllo B esistono varie tecniche che permettono di determinare una matrice di guadagni $\widehat{K}_0$ che stabilizzi il sistema. Come caso particolare di quello visto nel primo capitolo, si potrebbe ricorrere all'assegnazione dei poli (*pole place*). Esistono molte *rutines* in pacchetti software standard; per esempio in Matlab® il calcolo di $\widehat{K}_0$ può essere svolto applicando il comando "*place*"

Supponiamo che sia stata determinata la matrice di guadagni $\widehat{K}_0$ di dimensione $m \times n$, mediante retroazione dello stato. È possibile, estrarre una matrice K_0 fissando a zero gli

elementi della matrice $\widehat{K}_{0_{ij}}$ che corrispondonno a stati che non compaiono anche nel vettore delle uscite.

È molto importante inizializzare l'algoritmo direttamente con una matrice di guadagni appropriata e disporre inoltre di un efficiente strumento di minimizzazione. Questo perché qualora il funzionale da minimizzare non fosse convesso e presentasse quindi vari minimi locali, potrebbe accadere che partendo da una matrice di guadagni molto distante da quella di ottimo, l'algoritmo converga verso un minimo locale del PI.

2.6 Indici di prestazione dipendenti dal tempo

Per superare le verifiche sull'osservabilità è stato proposto in [12] un indice di prestazione modificato, con termini peso funzione del tempo descritto dalla come:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (t^k\, \tilde{\boldsymbol{x}}^T P \tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{x}}^T Q\, \tilde{\boldsymbol{x}}) dt \qquad 2.6.1$$

Se si desidera inserire il termine di controllo nell'indice di prestazione bisogna inserire all'interno dell'integrale il termine: $\tilde{u}^T R \tilde{u} = \tilde{\boldsymbol{x}}^T C^T K^T R K C \tilde{\boldsymbol{x}}$. Quindi il termine $C^T K^T R K C$ andrà sommato alla matrice dei pesi P o Q, a seconda che voglia essere pesato o no dal termine variabile col tempo t^k.

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (t^k\, \tilde{\boldsymbol{x}}^T P \tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{x}}^T (Q + C^T K^T R K C)\, \tilde{\boldsymbol{x}}) dt \qquad 2.6.2$$

Se si volesse pesare nel tempo il termine di controllo, nell'espressione precedente bisognerebbe sommare il termine $C^T K^T R K C$ alla matrice P anziché alla matrice Q.

Il ruolo del termine variabile col tempo è quello di eliminare effetti di ritardo che si manifestano dopo molto tempo. Questo è il caso di sistemi che presentano poli lenti che originano modi poco smorzati.

Sempre a causa del termine t^k la matrice dei guadagni K che minimizza J risulta funzione del tempo. Questa situazione potrebbe rende difficoltoso lo scheduling dei guadagni. Perché il progetto sia utile, bisognerà risolvere un problema di sub-ottimo, ottenendo un matrice K che sia tempo invariante.

Risolvendo per parti l'integrale precedente si vede che J è dato dalla alla soluzione, per una data matrice K, delle k equazioni nidificate di Lyapunov:

$$0 = g_0 = A_c^T P_0 + P_0 A_c + P$$

$$0 = g_1 = A_c^T P_1 + P_1 A_c + P_0$$

…

…

…

$$0 = g_{k-1} = A_c^T P_{k-1} + P_{k-1} A_c + P_{k-2}$$

$$0 = g_k = A_c^T P_k + P_k A_c + k!\, P_{k-1} + Q + C^T K^T R K C \qquad 2.6.3$$

Con

$$J = \frac{1}{2}\ \tilde{\boldsymbol{x}}^T(0) P_k \tilde{\boldsymbol{x}}(0) = \frac{1}{2}\ \bar{x}^T P_k \bar{x} = \frac{1}{2}\ \mathrm{tr}\ (P_k X) \qquad 2.6.4$$

Per risolvere tali equazioni e determinare la matrice dei guadagno di ottimo si può ricorrere alla procedura Simplex [8]. Come alternativa, si può usare un metodo ai gradienti che risulta essere più rapido. Per farlo bisogna procedere al calcolo dell'Hemiltonana:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\ \mathrm{tr}\ (P_k X) + \mathrm{tr}(g_0 S_0) + \cdots + \mathrm{tr}(g_k S_k) \qquad 2.6.5$$

Dove $S_i \geq 0$ sono matrici di moltiplicatori di Lagrange. Successivamente si procede alla differenzazione di $\mathcal{H}$ rispetto a tutte le variabili come visto nel paragrafo 2.2.2. Le equazioni di progetto per il problema LQTOF con indice di costo funzione del tempo sono riportate in tabella 2.4

Una procedura per risolvere il problema di ottimizzazione basata sul gradiente del PI, è quella di Davidon-Fletcher-Powell [4].

Per un dato valore di K si risolvono le equazioni di Lyapunov, rispetto P_i e S_i. Dato che $g_i = 0$, l'equazione 2.6.5, indica che $J = \mathcal{H}$. L'equazione 2.6.6 che rappresenta il gradiente di J rispetto K, permette di aggiornare i valori della matrice dei guadagni.

Se si desidera risolvere il problema di ottimizzazione LQ per la regolazione, sfruttando il peso funzione del tempo t^k, basta porre $X = I$ e $\bar{\boldsymbol{x}} = 0$ nelle equazioni riportate in tabella.

System model

$\dot{x} = Ax + Bu + Gr$

$y = Cx + Fr$

Control

$u = -Ky$

Performance Index

$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty [t^k \tilde{x}^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T (Q + C^T K^T RKC)\tilde{x}]dt$

Optimal Output Feedback Control

$0 = g_0 = A_c^T P_0 + P_0 A_c + P$

$0 = g_1 = A_c^T P_1 + P_1 A_c + P_0$

.

.

.

$0 = g_{k-1} = A_c^T P_{k-1} + P_{k-1} A_c + P_{k-2}$

$0 = g_k = A_c^T P_k + P_k A_c + k!\, P_{k-1} + Q + C^T K^T RKC$

$0 = A_c S_k + S_k A_c^T + X$

$0 = A_c S_{k-1} + S_{k-1} A_c^T + k!\, S_k$

$0 = A_c S_{k-2} + S_{k-2} A_c^T + S_{k-1}$

.

.

.

$0 = A_c S_0 + S_0 A_c^T + S_1$

$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = RKCS_k C^T - B^T(P_0 S_0 + \cdots + P_k S_k)C^T + B^T A_c^{-T} P_k \bar{x}\bar{y}^T$ 2.6.6

With r a unit step of magnitude r_0 and

$\bar{x} = -A_c{}^{-1} B_c r_0$

$\bar{y} = C\bar{x} + Fr_0$

$X = \bar{x}\bar{x}^T = A_c^{-1} B_c r_0 r_0^T B_c^T A_c^{-T}$

where

$A_c = A - BKC, \qquad B_c = G - BKF$

Optimal Cost

$J = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(P_k X)$

Tabella 2.4 Equazioni di progetto

OSSERVAZIONI PER LA PROGETTAZIONE

Nonostante un uso sensato da un punto di vista progettuale degli indici di prestazione, può accadere di dover "aggiustare" gli elementi delle matrici P e Q nella tabella precedente, finché

non si raggiungano le prestazioni richieste. Questo tipo di approccio è uno dei principali difetti del metodo LQ

Nel caso dell'inseguimento, un indice di prestazione sensato potrebbe essere:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (t^k \, \tilde{e}^T \tilde{e} + r\tilde{u}^T \tilde{u})dt \qquad 2.6\text{-}1$$

Nel quale, come si è visto in precedenza $\tilde{e} = -H\tilde{x}$ mentre le uscite di prestazione dal sistema sono state indicate con $z = Hx$.

L'indice di prestazione così definito, corrisponde all'esigenza di rendere minime le deviazioni senza far spendere molta energia al sistema di controllo.

Dato che:

$$\boldsymbol{\tilde{e}}^T \boldsymbol{\tilde{e}} = \boldsymbol{\tilde{x}}^T H^T H \, \boldsymbol{\tilde{x}} \qquad 2.6\text{-}2$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (t^k \boldsymbol{\tilde{x}}^T H^T H \, \boldsymbol{\tilde{x}} + r\boldsymbol{\tilde{u}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\tilde{u}})dt \qquad 2.6\text{-}3$$

Per analogia, equivale a porre in tabella: $H^T H = P$; $Q = 0$ ed $R = rI$.

In tal caso, se il sistema (H, A) non fosse osservabile e se $k = 0$, potrebbero esserci problemi con qualsiasi metodo LQ. Più in dettagli, in tal caso potrebbe verificarsi che l'equazione di Lyapunov 2.6-4 potrebbe non avere come soluzione una matrice P semidefinita positiva.

$$A_c^T P + P A_c + H^T H + C^T K^T R K C = 0 \qquad 2.6\text{-}4$$

Come effetto di ciò potrebbe accadere che qualche ramo in retroazione rimanga aperto (ciò equivale a dire che il corrispondente guadagno sia nullo). Per correggere tale problema, si potrebbe pensare di aggiungere all'indice di prestazione un termine come $\boldsymbol{\tilde{x}}^T Q \, \boldsymbol{\tilde{x}}$, con $(\sqrt{Q}, A)$ osservabile. Ma in realtà si vuole evitare tale soluzione, perché si ritornerebbe al problema di dover aggiustare i termini di Q in modo da ottenere un'opportuna matrice dei guadagni.

Il problema della non osservabilità di $(\sqrt{P}, A)$ può essere superato assumendo k>0 nelle nell'indice di prestazione e nelle equazioni riportate in tabella. Si vede che per k>0, se pur non dovesse essere osservabile $(\sqrt{P}, A)$, si potrebbe trovare un k tale che $(\sqrt{k!\, P_{k-1}}, A)$ risulti osservabile. In tal caso, l'ultima equazione di Lyapunov, avrebbe una soluzione P_k definita positiva e dunque sarebbe possibile determinare una soluzione K al problema di controllo.

Capitolo 3

3. Descrizione del FCS, del modello del velivolo e dei criteri di sintesi usati

3.1 Introduzione

La funzione principale del FCS è quella di assicurare le opportune caratteristiche di stabilità e controllo all'interno dell'intero inviluppo di volo, per ogni valore ammissibile di quota, velocità, fattore di carico e posizione del centro di gravità.

Una serie di sensori forniscono al Flight Control Computer (FCC) informazioni sui "dati aria", i dati inerziali e quelli provenienti dalla cabina di pilotaggio. All'interno del FCC sono implementate le leggi di controllo che determinano gli ingressi ai sistemi di attuazione delle superfici di controllo e alla gestione della spinta dei motori.

In campo aeronautico il controllo in retroazione è necessario per consentire al velivolo di seguire nel modo più preciso possibile i comandi del pilota, per attenuare i disturbi esterni come le raffiche e le turbolenze, nonchè per fornire robustezza contro gli errori di modello.

I sistemi FBW consentono al pilota di controllare direttamente gli stati del sistema piuttosto che la posizione dei comandi (deflessione delle superfici etc). Ciò consente di incrementare il livello complessivo di sicurezza, ad esempio, attraverso la definizione di opportune ***leggi di controllo*** in grado di garantire la protezione dell'inviluppo di volo e aiutare il pilota nelle sue funzioni, soprattutto nelle fasi più critiche. Sovente la gestione dei comandi tramite FCS consente di uscire da situazioni difficili da governare e permette di eseguire anche manovre altrimenti critiche.

Nel presente capitolo è descritto lo schema del FCS del velivolo FBW, P1xx. Per ogni blocco del sistema è spiegato il ruolo che svolge ed è riportato relativo modello in termini di funzioni di trasferimento.

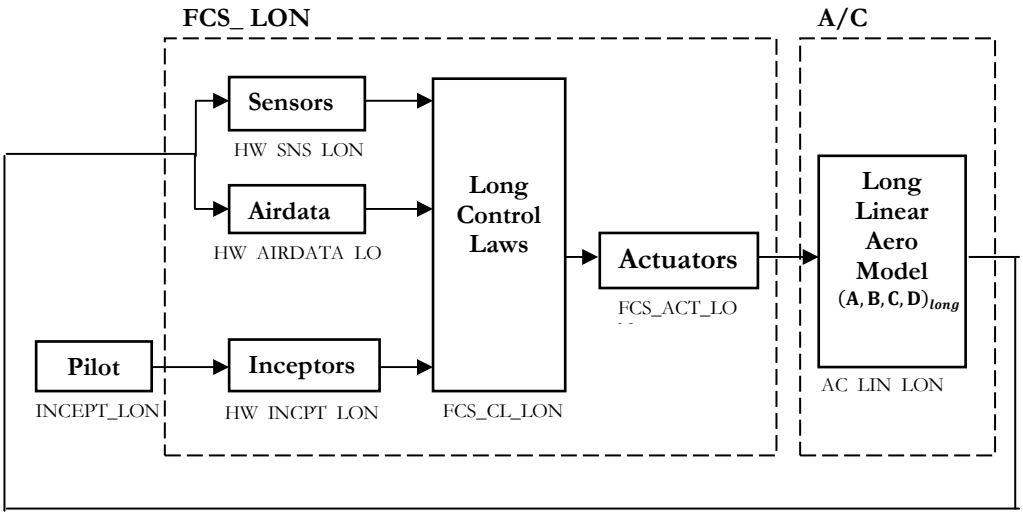


Figura 3.1 Schema del Fly Control System relativo al piano longitudinale

I principali sottosistemi che lo compongono sono:

- il blocco A/C
- il blocco FCS_LON

Il blocco A/C contiene le matrici di stato A,B,C,D della dinamica linearizzata del velivolo.

Il blocco FCS_LON (Fly Control System relativo al piano lngitudinale) invece contiene la descrizione dell'hardware dei sensori, degli attuatori e dei comandi del pilota, insieme alle leggi di controllo che permettono la realizzazione del controllo in ciclo chiuso nel piano longitudinale.

Il modello completo che descrive il sistema è stato realizzato in ambiente Matlab®, con l'ausilio del toolbox Simulink®.

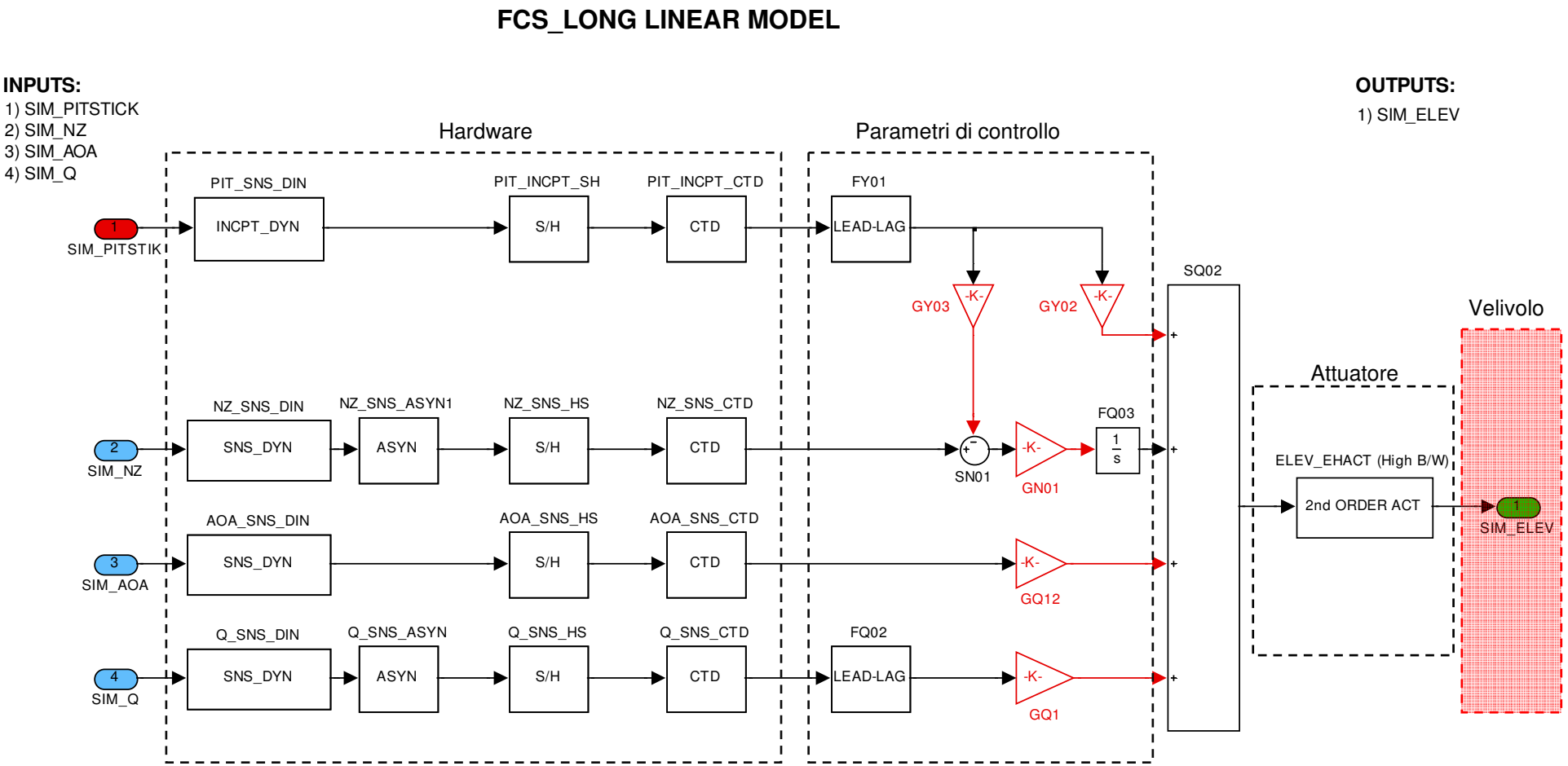


Figura 3.2 Schema del FCS

3.2 Descrizione del sistema di controllo

In figura 3.2, è riporta la realizzazione in Simulink®, dello schema dettagliato del FCS_LON. Sono state evidenziate tre aree in tratteggio: una contenente la descrizione modelli dell'hardware dei sensori, una relativa all'implementazione delle leggi di controllo ed una relativa all'attuatore.

L'uscita dall'attuatore "SIM_ELEV", evidenziata in verde, corrisponde alla deflessione dell'equilibratore. Gli ingressi indicati con "SIM_NZ", "SIM_AOA", "SIM_Q", evidenziati in blu, sono ingressi retroazionati al sistema come descritto in figura 3.1.

Il pilota controlla il velivolo in ciclo chiuso mediante uno "stick" il quale invia un segnale in ingresso al FCS. Tale segnale d'ingresso in figura 3.2 è evidenziato in rosso e denominato "SIM_PITSTK". Il comando, normalizzato da -1 a 1 è successivamente convertito in fattore di carico tramite il guadagno GY03.

I rami corrispondenti agli ingressi "SIM_Q" e "SIM_AOA" costituiscono rispettivamente i SAS in α e q per aumentare lo smorzamento e la pulsazione del sistema in ciclo chiuso.

Il pilota attraverso lo "stick" richiede un certo valore del fattore di carico $n_{z_{dmd}}$, il sistema risponde e la catena di sensori rileva $n_{z_{out}}$. Attraverso il nodo sommatore viene misurato l'errore $\left(n_{z_{out}} - n_{z_{dmd}}\right)$ e il ramo in retroazione viene chiuso mediante un controllo integrale con guadagno indicato con GY01. Il sistema così definito non è assimilabile a un tradizionale controllo proporzionale integrale. Si capisce bene analizzando lo schema semplificato in figura 3.3 in cui è riportata solo la retroazione in n_z.

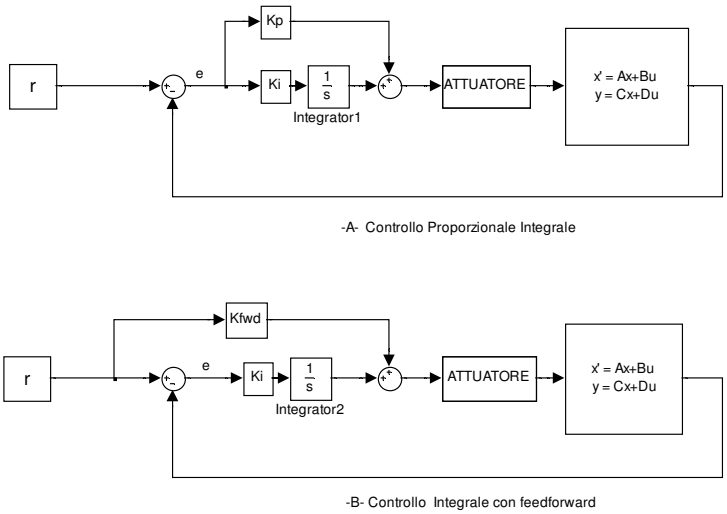


Figura 3.3 Differenze con un controllore PI

Nel controllo proporzionale integrale, come mostrato in fig. 3.3-A, l'errore e passa sia dal controllo proporzionale che dal controllo integrale. Nel caso dello schema semplificato del sistema di controllo riportato in figura 3.3-B, si esercita un controllo puramente integrale dell'errore.

In più, per aumentare la rapidità del sistema, attraverso un ramo feedforward, il comando dallo "stick" va direttamente a dare un contributo tramite il guadagno GY02 alla deflessione dell'elevatore. Il feedforward è volto a stabilire una connessione diretta tra il pilota e la risposta velivolo mantenendo una sensazione di controllo attivo. Il valore del guadagno GY02 converte la richiesta di fattore di carico in un coefficiente di momento di beccheggio C_m, al fine di ottenere in tempi rapidi un'accelerazione angolare $\dot{q}$. Indicando d'ora in poi $\mathrm{GY02} \equiv \mathrm{K_{fwd}}$, vale la relazione: $\frac{C_m}{n_z} = \mathrm{K_{fwd}}$. D'altra parte $\dot{q} = \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{SC}{I_y} C_m$. Quindi indicando $\frac{\dot{q}}{n_z}$ l'accelerazione angolare richiesta per un ingresso di fattore di carico, per le precedenti relazioni vale:

$$\mathrm{K_{fwd}} = \frac{\dot{q}/n_z}{\frac{1}{2}\rho V^2 \frac{SC}{I_y}}$$

Come si nota dall'espressione precedente, il valore del guadagno$\mathrm{K_{fwd}}$ è legato al CAP (Control Anticipation Parameter)

Il valore di $\mathrm{K_{fwd}}$ è stato assunto pari a -0.91 per la condizione di volo di riferimento definita da M=0.6 mentre per le altre condizioni di volo è stato dedotto scalandolo con la pressione dinamica.

Di seguito è riportata la descrizione dei vari blocchi che costituiscono il modello del FCS.

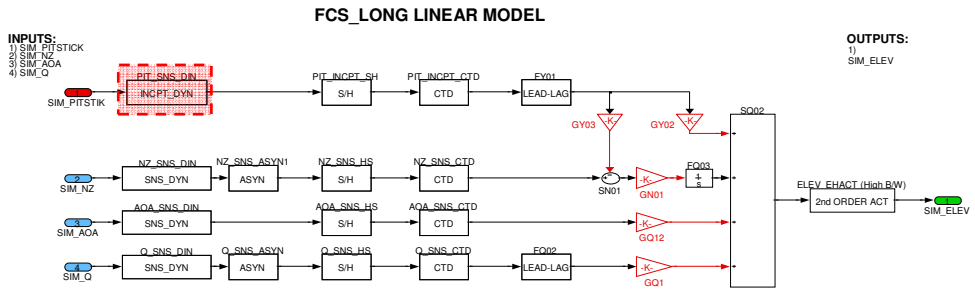
3.2.1 Modello dei sensori dinamici

In questo paragrafo sono riportati i modelli usati per descrivere la dinamica dei sensori. Seppur concettualmente diversi, per praticità, sono stati raggruppati sensori descritti da uno stesso modello.

Di conseguenza in tabella 3.1 è riportato il modello dei sensori che forniscono i comandi del pilota, nello schema del FCS descritto dal blocco**: PIT_INCPT_DYN**

In tabella 3.2 è riportato il modello dei sensori dati-aria, descritto dal blocco: **AOA_SNS_DYN.** Mentre in tabella 3.3 è riportato il modello che descrive la dinamica dei sensori che misurano la velocità angolare e il fattore di carico, rispettivamente riportati nello schema nei blocchi: **Q _SNS_DYN** e **NZ_SNS_DYN.**

Tabella 3.1 Sensore dinamico: PIT_INCPT_DYN

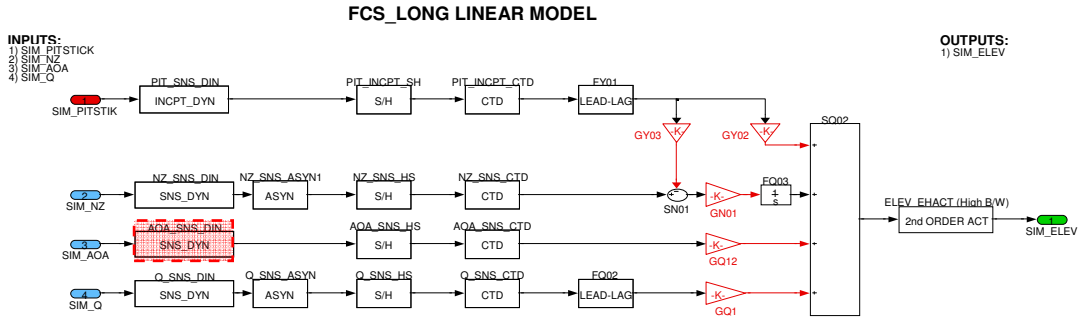


MODEL	DESCRIPTION
PIT_INCPT_DYN	Inceptor sensor dynamics, common to all axes.

SPECIFICATION

CONDITION	REPRESENTING	DEFINITION
Nominal	Inceptor electronics delay (4 ms) Anti-aliasing filtering (7.5 deg/1Hz)	Sensing dynamics modelled as scaling gain k equal to 1 multiplied by 2nd order TF with ωn = 56 rad/s and ζ = 0.7 (9 deg/1Hz): $K \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$
Other	NOT MODELLED	

Tabella 3.2 Sensore dati-aria: AOA_SNS_DYN



MODEL	DESCRIPTION
AOA_SNS_DYN	Airdata sensor dynamics, angle of attack.

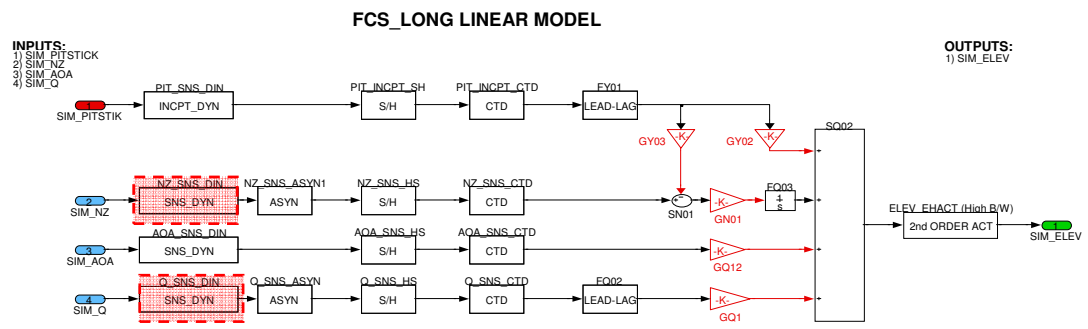
SPECIFICATION

CONDITION	REPRESENTING	DEFINITION
Nominal	Sensing delay of 10ms for electronic processing of transducer & averaging (e.g. 80Hz→ 20Hz) Anti-aliasing filtering (15.5 deg/1Hz)	Sensing dynamics modelled as a pure delay of 10ms: $e^{-0.01\ s}$ multiplied by 2nd order TF with unity gain K, ωn = 33 rad/s and ζ = 0.7 (15.5deg/1Hz): $K \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$
Other	NOT MODELLED	

LINEAR MODEL

CONDITION	LINEARISATION	DEFINITION
Nominal	2nd order TF equivalent to the nonlinear model and the sensing delay modelled with a first order Padè approximation	$\frac{1 - 0.005 \cdot s}{1 + 0.005 \cdot s} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$
Other	NOT MODELLED	

Tabella 3.3 Sensori di misurazione della velocità angolare Q _SNS_DYN e del fattore di carico NZ_SNS_DYN



MODEL	DESCRIPTION
NZ_SNS_DYN	Acceleration sensor dynamics, common to all axes.
Q_SNS_DYN	Rate sensor dynamics, common to all axes.

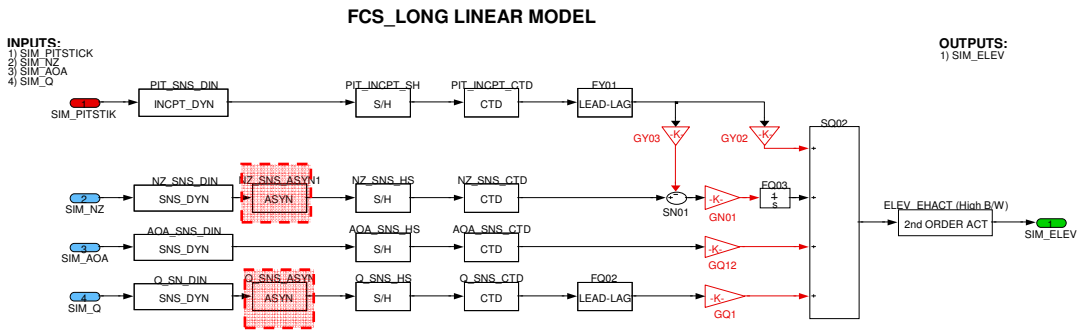
SPECIFICATION

CONDITION	REPRESENTING	DEFINITION
Nominal	Sensing delay of 10ms for electronic processing of transducer & averaging (e.g. 160Hz→ 40Hz) Anti-aliasing filtering (12 deg/1Hz)	Sensing dynamics modelled as a pure delay of 10ms: $e^{-0.01\ s}$ multiplied by 2nd order TF with unity gain K, ωn = 33 rad/s and ζ = 0.7 (15.5deg/1Hz): $K \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$
Other	NOT MODELLED	

LINEAR MODEL

CONDITION	LINEARISATION	DEFINITION
Nominal	2nd order TF equivalent to the nonlinear model and the sensing delay modelled with a first order Padè approximation	$\frac{1 - 0.005 \cdot s}{1 + 0.005 \cdot s} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$
Other	NOT MODELLED	

Tabella 3.4 Ritardo dovuto alla traduzione per il FCC



MODEL	DESCRIPTION
NZ_SNS_ASYN Q_SNS_ ASYN	AVS Bus asynch average delay

SPECIFICATION

CONDITION	REPRESENTING	DEFINITION
Nominal	Asinch delay AVS→FCC	$\tau_{ASYN} = 12.5\ ms$ modelled as a pure delay: $e^{-0.0125s}$
Other	NOT MODELLED	

LINEAR MODEL

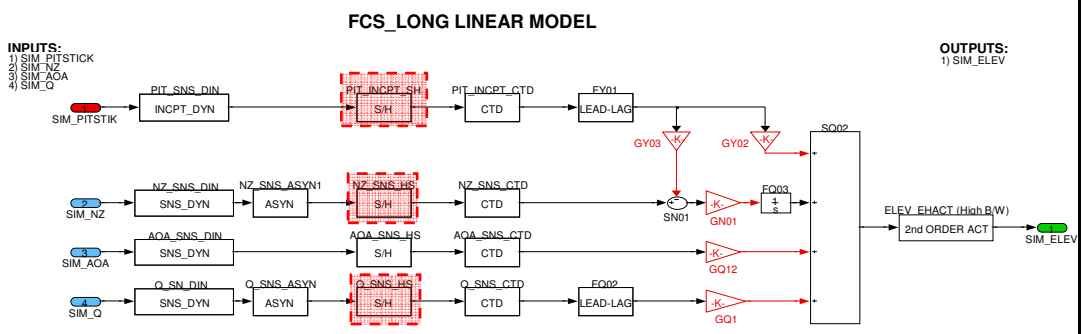
CONDITION	LINEARISATION	DEFINITION
Nominal	First order Padè approximation	$\text{Linear TF} = \dfrac{1 - 0.00625 \cdot s}{1 + 0.00625 \cdot s}$
Other	NOT MODELLED	

3.2.3 Blocchi Sample/Hold (S/H)

Il "Sample and Hold" simula il ritardo dovuto al campionamento del segnale. Il blocco ricevere un segnale in ingresso (Sample) lo mantiene per tutto il tempo necessario (Hold) per eseguire il campionamento. Le fasi di funzionamento sono controllate da un clock.

Dato che rappresentabili tutti con la stessa funzione di trasferimento, in tabella 3.5 sono descritti insieme i blocchi che nello schema del FCS sono indicati come: **PIT_INCPT_SH**, **NZ_SNS_SH** e **Q_SNS_ SH**.

Tabella 3.5 Modello che descrive i blocchi Sample/Hold: PIT_INCPT_SH, NZ_SNS_SH e Q_SNS_SH

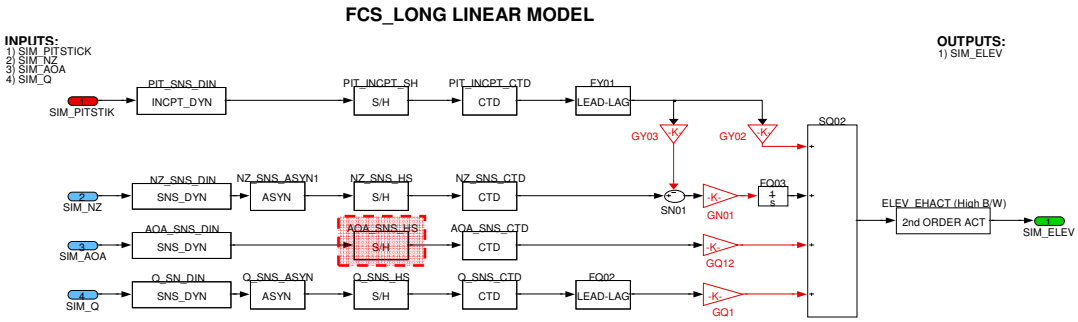


MODEL	DESCRIPTION
PIT_INCPT_SH NZ_SNS_SH Q_SNS_ SH	Sensor sample-hold effects.

SPECIFICATION		
CONDITION	**REPRESENTING**	**DEFINITION**
Nominal	S/H delay (40Hz sampling)	40 Hz sampling → S/H pure delay $\tau_{S/H} = \tau_s/2 = 12.5\ ms$
Other	NOT MODELLED	

LINEAR MODEL		
CONDITION	**LINEARISATION**	**DEFINITION**
Nominal	First order Padè approximation	$\text{Linear TF} = \dfrac{1 - 0.00625 \cdot s}{1 + 0.00625 \cdot s}$

Tabella 3.6 Modello che descrive i blocchi Sample/Hold: AOA_SNS_SH



MODEL	DESCRIPTION
AOA_SNS_SH	Airdata Sensor sample-hold effects.

SPECIFICATION

CONDITION	REPRESENTING	DEFINITION
Nominal	S/H delay (20Hz sampling)	20 Hz sampling → S/H pure delay $\tau_{S/H} = \tau_s/2 = 25\ ms$
Other	NOT MODELLED	

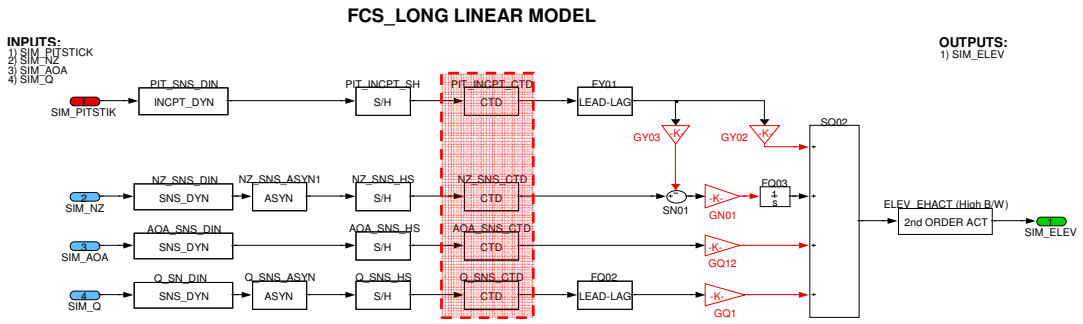
LINEAR MODEL

CONDITION	LINEARISATION	DEFINITION
Nominal	First order Padè approximation	$\text{Linear TF} = \dfrac{1 - 0.00125 \cdot s}{1 + 0.00125 \cdot s}$
Other	NOT MODELLED	

3.2.4 Ritardo computazionale

In tabella 3.7 è riportato il modello usato per tener conto dei ritardi computazionali del FCC (Flight Control Computer).

Tabella 3.7 Modello dei ritardi computazionali



MODEL	DESCRIPTION
PIT_INCPT_SH	Computational delay (CTD) is the time needed by FCC to output the results, common all axes
NZ_SNS_SH	
AOA_SNS_SH	
Q_SNS_ SH	

SPECIFICATION

CONDITION	REPRESENTING	DEFINITION
Nominal	CTD delay	CTD pure delay $\tau_{\mathrm{CTD}} = 6.25\ ms$
Other	NON APPLICABLE	

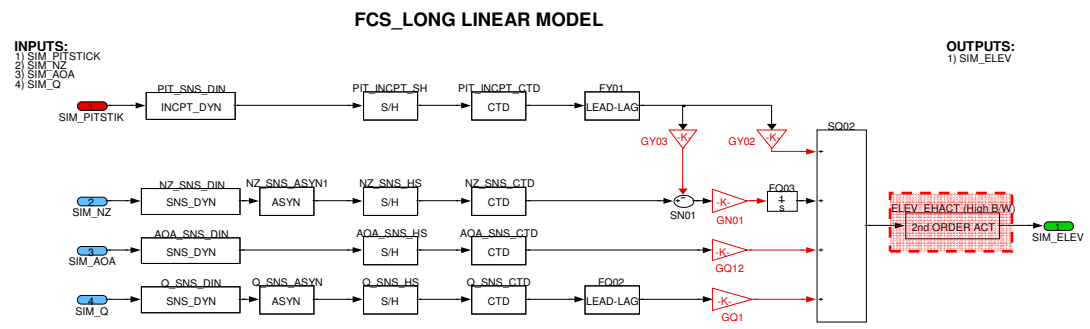
LINEAR MODEL

CONDITION	LINEARISATION	DEFINITION
Nominal	First order Padè approximation	$\text{Linear TF} = \dfrac{1 - 0.003125 \cdot s}{1 + 0.003125 \cdot s}$
Other	NOT MODELLED	

3.2.5 Attuatore

L'elevatore è movimentato mediante un attuatore elettroidraulico la cui dinamica è rappresentata da un sistema del secondo ordine, come descritto in tabella 3.8.

Tabella 3.8 Modello della dinamica dell'attuatore



MODEL	DESCRIPTION
ELEV_EHACT	Electrohydraulic (EH) primary actuators (High b/w) for elevator

SPECIFICATION		
CONDITION	**REPRESENTING**	**DEFINITION**
Nominal		
Other	NOT MODELLED	

LINEAR MODEL		
CONDITION	**LINEARISATION**	**DEFINITION**
Nominal	2nd order TF	EH actuator dynamics linearly modeled as gain $K_0 = 1$ multiplied by 2nd order TF $\omega_n = 32\ rad/s$ and $\zeta = 0.7$ damping (16 deg/1Hz) $$K_0 \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$
Other	NOT MODELLED	

3.2.6 Filtri

In figura sono evidenziati due blocchi che rappresentano dei filtri anticipo/ritardo da ottimizzare a seconda della condizione di volo, in modo da garantire il soddisfacimento dei requisiti di prestazione.

La funzione di trasferimento che li caratterizza è:

$$TF = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$$

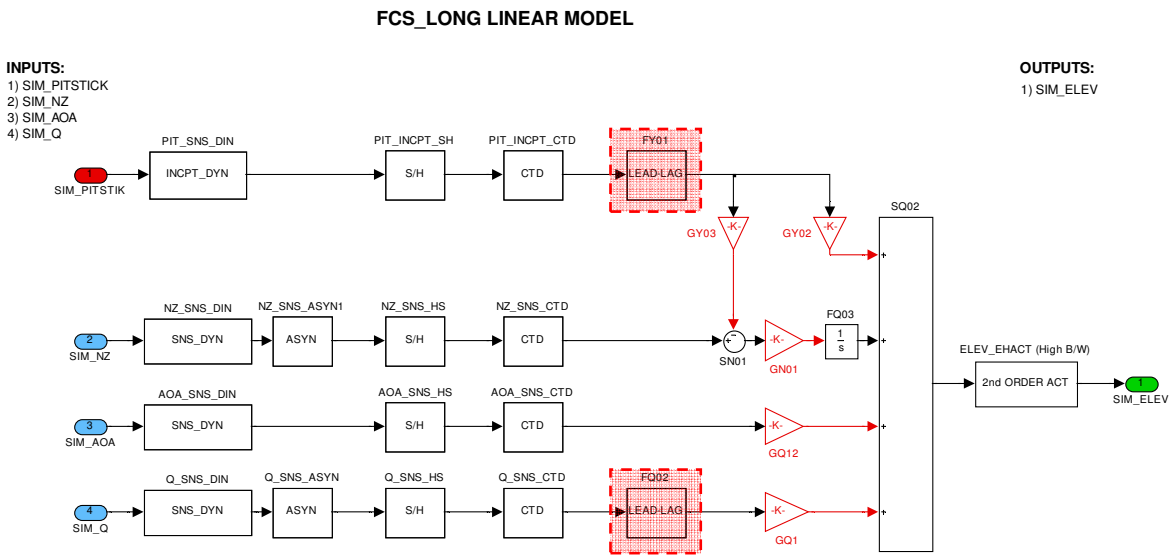


Figura 3.4 Filtri anticipo-ritardo

3.3 Dinamica linearizzata di corto periodo del velivolo

Si consideri un sistema di riferimento T_B solidale al velivolo e baricentrale, con x_B-z_B piano di simmetria longitudinale, per cui la velocità e le condizioni di equilibrio del velivolo siano quelle riportate in tabella 3.9.

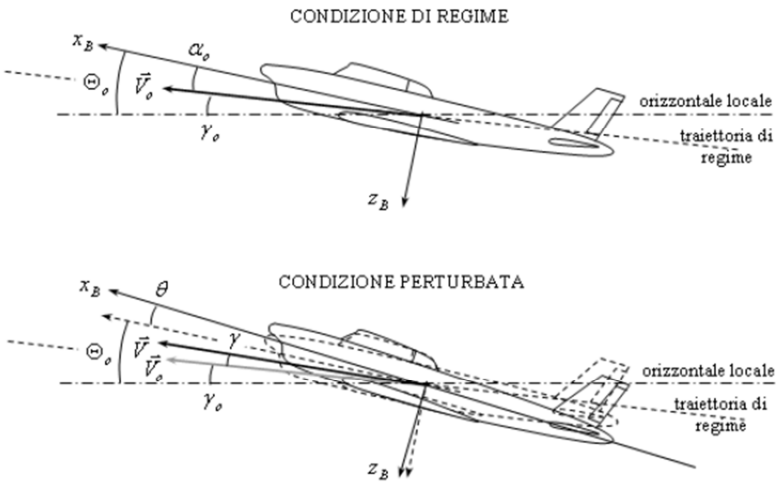


Figura 3.5 Sistema di riferimento assi corpo generici: condizione di trim

TERNA DI RIFERIMENTO	CONDIZIONE DI TRIM
Assi corpo generici: $\alpha_0 \neq 0$ $\vec{V}_0 = \{U_0 \quad 0 \quad W_0\}$ $\begin{cases} U_0 = \lvert\vec{V}_0\rvert cos\Theta_0 \\ V_0 = 0 \\ W_0 = \lvert\vec{V}_0\rvert sin\Theta_0 \end{cases}$ $\Theta_0 = \gamma_0 + \alpha_0$	Velocità di volo $\lvert\vec{V}_0\rvert$ Pendenza della traiettoria γ_0 • Volo rettilineo uniforme • Simmetrico $\beta_0 = 0$ • Ali livellato $\phi_0 = 0$

Tabella 3.9 Sistema di riferimento assi corpo generici e condizione di trim

Si consideri inoltre:

- Il velivolo rigido
- La massa e la distribuzione di massa costanti
- Si consideri valida l'ipotesi di terra piana e non rotante

- Le coppie giroscopiche delle masse rotanti trascurabili

Sotto tali condizioni, le equazioni del moto linearizzate intorno alla condizione di equilibrio, relative al piano longitudinale, sono:

$$\begin{cases} \dot{u} + W_0 q + \vartheta g cos(\Theta_0) = \mathrm{X}_u u + \mathrm{X}_w w + \mathrm{X}_q q + \mathrm{X}_{\dot{u}} \dot{u} + \mathrm{X}_{\dot{w}} \dot{w} + \mathrm{X}_{\delta e} \delta e + \mathrm{X}_{\delta t} \delta t \\ \dot{w} - U_0 q + \vartheta g sin(\Theta_0) = \mathrm{Z}_u u + \mathrm{Z}_w w + \mathrm{Z}_q q + \mathrm{Z}_{\dot{u}} \dot{u} + \mathrm{Z}_{\dot{w}} \dot{w} + \mathrm{Z}_{\delta e} \delta e + \mathrm{Z}_{\delta t} \delta t \\ \dot{q} = \mathrm{M}_u u + \mathrm{M}_w w + M q + \mathrm{M}_{\dot{u}} \dot{u} + \mathrm{M}_{\dot{w}} \dot{w} + \mathrm{M}_{\delta e} \delta e + \mathrm{M}_{\delta t} \delta t \\ \dot{\vartheta} = q \end{cases}$$

Aggiungendo l'ipotesi di volo livellato $\Theta_0 = 0$ e passando ad un sistema di *assi corpo stabilità*, il modello si semplifica ulteriormente. Si tratta quindi di passare dal riferimento T_B al riferimento T_s , ruotato dell'angolo α_0 rispetto al primo (figura 3-7).

Operando tale rotazione degli assi di riferimento, bisogna trasformare opportunamente da una terna all'altra anche le derivate aerodinamiche.

Il vantaggio che deriva da tale trasformazione è quello di poter trascurare le derivate 3.3.1, ottenendo il sistema semplificato 3.2

$$\mathrm{X}_q \cong \mathrm{X}_{\dot{u}} \cong \mathrm{X}_{\dot{w}} \cong \mathrm{M}_{\dot{u}} \cong \mathrm{Z}_{\dot{u}} \cong 0 \qquad 3.3.1$$

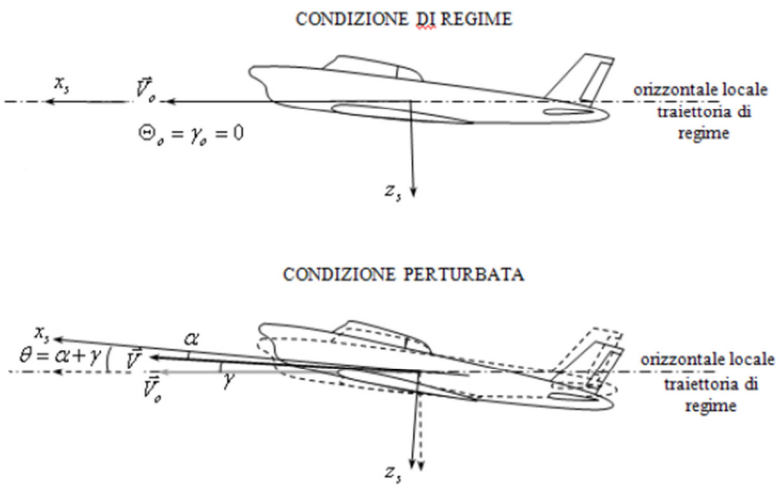


Figura 3.6 Sistema di riferimento assi corpo stabilità: condizione di trim

TERNA DI RIFERIMENTO	CONDIZIONE DI TRIM
Assi corpo stabilità: $\alpha_0 = 0$ $\vec{V}_0 = \{U_0 \quad 0 \quad 0\}$ $\begin{cases} U_0 = \lvert\vec{V}_0\rvert cos\Theta_0 \\ V_0 = 0 \\ W_0 = 0 \end{cases}$ $\Theta_0 = \gamma_0 = 0$	Velocità di volo $\lvert\vec{V}_0\rvert$ Pendenza della traiettoria $\gamma_0 = 0$ • Volo rettilineo uniforme • Simmetrico $\beta_0 = 0$ • Ali livellato $\phi_0 = 0$

Tabella 3.10 Sistema di riferimento assi corpo stabilità e condizione di trim

$$\begin{cases} \dot{u} \quad + \vartheta g = \mathrm{X}_u u + \mathrm{X}_w w + \mathrm{X}_q q \qquad + \mathrm{X}_{\delta e}\delta e + \mathrm{X}_{\delta t}\delta t \\ \dot{w} - U_0 q = \mathrm{Z}_u u + \mathrm{Z}_w w + \mathrm{Z}_q q + \mathrm{Z}_{\dot{w}}\dot{w} + \mathrm{Z}_{\delta e}\delta e + \mathrm{Z}_{\delta t}\delta t \\ \dot{q} \qquad = \mathrm{M}_u u + \mathrm{M}_w w + \mathrm{M}_q q + \mathrm{M}_{\dot{w}}\dot{w} + \mathrm{M}_{\delta e}\delta e + \mathrm{M}_{\delta t}\delta t \\ \dot{\vartheta} = q \end{cases} \qquad 3.3.2$$

Equazioni aggiuntive alle 3.3.2 sono:

$$\alpha = w/U_0 \qquad a_z = \dot{w} - U_0 q \qquad \dot{\vartheta} = q$$
$$\gamma = \vartheta - \alpha \qquad \dot{h} = U_0\gamma \qquad a_z = -U_0\dot{\gamma} = -\ddot{h}$$

Il sistema ottenuto può essere scritto in forma matriciale una volta definito i vettori degli stati e del controllo. Una scelta naturale dei i vettori di stato e controllo è la seguente:

$$\boldsymbol{x} = \{u \quad w \quad \vartheta \quad q\}^T \; ; \qquad \boldsymbol{u} = \{\delta t \quad \delta e\}^T \qquad 3.3.3$$

Quindi il sistema può essere scritto in variabili di stato come:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \qquad 3.3.4$$

La risposta nel tempo del velivolo ad un ingresso, sia esso dovuto d un comando o ad un disturbo, è caratterizzata dagli autovalori e dagli autovettori della matrice A.
Dalla soluzione del polinomio caratteristico:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \qquad 3.3.5$$

si ottengono due coppie di autovalori complessi coniugati: $\lambda_{sp2} = \overline{\lambda_{sp1}}$ e $\lambda_{lp4} = \overline{\lambda_{lp3}}$ e altrettanti corrispondenti autovettori: : $\boldsymbol{v}_{sp2} = \overline{\boldsymbol{v}_{sp1}}$ e $\boldsymbol{v}_{lp4} = \overline{\boldsymbol{v}_{lp3}}$.
Tali coppie di autovalori ed autovettori danno luogo a due dinamiche molto differenti tra loro che si manifestano con tempi caratteristici molto diversi. Il corto periodo, nasce ed evolve nei primi istanti del moto mentre il lungo periodo si manifesta in tempi lunghi.
Dall'analisi della risposta nel tempo ad un ingresso (gradino per esempio) o ad un disturbo, si nota il seguente comportamento:

CORTO PERIODO	• Le variazioni di velocità sono trascurabili durante i tempi caratteristici di corto periodo. • Marcate oscillazioni dell'incidenza α intorno al valore di equilibrio • Marcate oscillazioni di q
LUNGO PERIODO	• Le variazioni di α sono trascurabili • Le variazioni di q sono trascurabili

Con tali osservazioni, è possibile trascurare la prima equazione ed i termini $\mathrm{Z}_u u$ ed $\mathrm{M}_u u$ del sistema 3.32 ottenendo il modello di corto periodo riportato di seguito:

$$\begin{cases} \dot{w} = \left(\frac{\mathrm{Z}_w}{1-\mathrm{Z}_{\dot{w}}}\right) w + \left(\frac{\mathrm{Z}_q + U_0}{1-\mathrm{Z}_{\dot{w}}}\right) q + \left(\frac{\mathrm{Z}_{\delta e}}{1-\mathrm{Z}_{\dot{w}}}\right) \delta e + \left(\frac{\mathrm{Z}_{\delta t}}{1-\mathrm{Z}_{\dot{w}}}\right) \delta t \\ \dot{q} = (\mathrm{M}_w + \frac{\mathrm{Z}_w \mathrm{M}_{\dot{w}}}{1-\mathrm{Z}_{\dot{w}}}) w + \left[M_q + \frac{(\mathrm{Z}_q + U_0)\mathrm{M}_{\dot{w}}}{1-\mathrm{Z}_{\dot{w}}}\right] q + (\mathrm{M}_{\delta e} + \frac{\mathrm{Z}_{\delta e}\mathrm{M}_{\dot{w}}}{1-\mathrm{Z}_{\dot{w}}}) \delta e + \frac{\mathrm{M}_{\delta t}}{1-\mathrm{Z}_{\dot{w}}} \delta t \\ \dot{\vartheta} = q \end{cases} \qquad 3.3.6$$

Va osservato che tale modello mantiene la sua validità fin tanto che la velocità di perturbazione u rimane abbastanza piccola da non modificare la seconda e terza equazione del sistema 3.3.2, attraverso i termini $\mathrm{Z}_u u$ e $\mathrm{M}_u u$.

Nel modello di corto periodo dunque, le matrice della dinamica e quella degli ingressi sono:

$$A = \begin{bmatrix} \left(\frac{\mathrm{Z}_w}{1-\mathrm{Z}_{\dot{w}}}\right) & \left(\frac{\mathrm{Z}_q+U_0}{1-\mathrm{Z}_{\dot{w}}}\right) & 0 \\ \left(\mathrm{M}_w + \frac{\mathrm{Z}_w \mathrm{M}_{\dot{w}}}{1-\mathrm{Z}_{\dot{w}}}\right) & \left[M_q + \frac{(\mathrm{Z}_q+U_0)\mathrm{M}_{\dot{w}}}{1-\mathrm{Z}_{\dot{w}}}\right] & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \left(\frac{\mathrm{Z}_{\delta e}}{1-\mathrm{Z}_{\dot{w}}}\right) & \left(\frac{\mathrm{Z}_{\delta t}}{1-\mathrm{Z}_{\dot{w}}}\right) \\ \left(\mathrm{M}_{\delta e} + \frac{\mathrm{Z}_{\delta e}\mathrm{M}_{\dot{w}}}{1-\mathrm{Z}_{\dot{w}}}\right) & \frac{\mathrm{M}_{\delta t}}{1-\mathrm{Z}_{\dot{w}}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In realtà la terza equazione del sistema 3.3.6, può essere considerata disaccoppiata dalle prime due. Ciò significa che nella matrice A potrebbero essere eliminate l'ultima riga e l'ultima colonna mentre nella matrice B si potrebbe eliminare l'ultima riga.

In appendice C sono riportate le matrici di stato del velivolo P1xx relative a tre condizioni di volo. Precisamente, alla quota di volo di $29300\ ft$ ($8930.6m$) e in corrispondenza dei Mach di volo 0.45, 0.6 e 0.84.

Note le matrici che descrivono la dinamica di corto periodo A e B e le matrici che legano lo stato e gli ingressi all'uscita C e D, è stato costruito in Matlab® il modello, in variabili di stato, del velivolo. Tramite il comando 'damp' sono stati ricavati i poli, lo smorzamento e la pulsazione di corto periodo, per le condizioni di volo descritte; i risultati sono stati riportati in tabella 3.11.

I risultati ottenuti mostrano un corto periodo stabile e poco smorzato tipico degli aeroplani convenzionali operanti all'interno dell'inviluppo di volo.

Sono state ricavate inoltre le principali funzioni di trasferimento tra le uscite e l'ingresso di equilibratore e nelle figure 3.8-3.11 sono riportate le risposte temporali per un ingresso a gradino unitario (a cabrare).

Condizione di Volo	Poli	Damping ζ	Freq. ω_n(rad/s)
M = 0.45	-0,83595 + 2,6771i	0,29807	2,8046
	-0,83595 - 2,6771i	0,29807	2,8046
M = 0.6	-1,165 + 3,7175i	0,29903	3,8957
	-1,165 - 3,7175i	0,29903	3,8957
M = 0.84	-1,627 + 5,4971i	0,2838	5,7328
	-1,627 - 5,4971i	0,2838	5,7328

Tabella 3.11 Corto periodo del velivolo per tre condizioni di volo alla quota di 29300 ft, $\alpha_0 = 0$

$$\frac{\alpha}{\delta_e} = \frac{-0.048199\ (s+195.9)}{(s^2\ + 2.33s + 15.18)} \qquad \frac{q}{\delta_e} = \frac{-9.5003\ (s+0.8916)}{(s^2\ + 2.33s + 15.18)}$$

$$\frac{\vartheta}{\delta_e} = \frac{-9.5003\ (s+0.8916)}{s(s^2\ + 2.33s + 15.18)} \qquad \frac{TAS}{\delta_e} = \frac{-1.3459.10^{-26}(s+195.9)}{(s^2\ + 2.33s + 15.18)} \cong 0$$

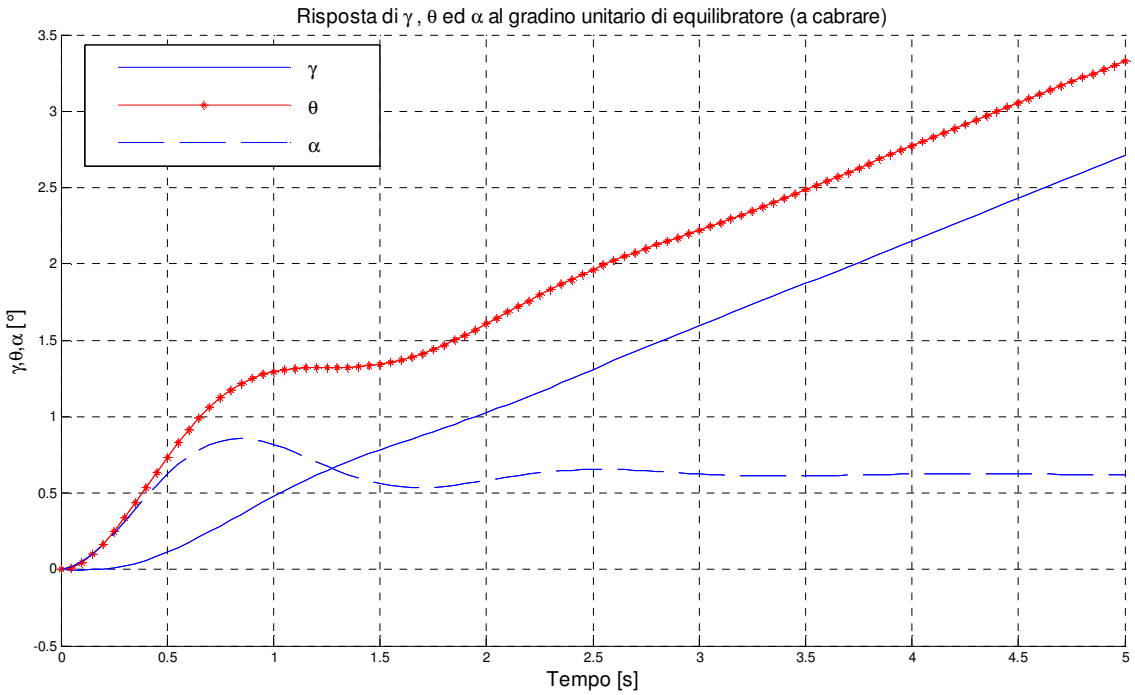


Figura 3.7 Risposte in α, q e ϑ al gradino di equilibratore

$$\frac{\gamma}{\delta_e} = \frac{0.048199\ (s + 12.67)\ (s - 13.87)}{(s\text{^}2\ \ +\ 2.33s\ +\ 15.18)}$$

$$\frac{\dot{q}}{\delta_e} = \frac{-9.499\ (s + 0.891)\ (s + 0.0008015)}{(s\text{^}2\ \ +\ 2.33s\ +\ 15.18)}$$

$$\frac{\dot{\alpha}}{\delta_e} = \frac{-0.0482\ (s + 0.0001355)\ (s + 196)}{(s\text{^}2\ \ +\ 2.33s\ +\ 15.18)}$$

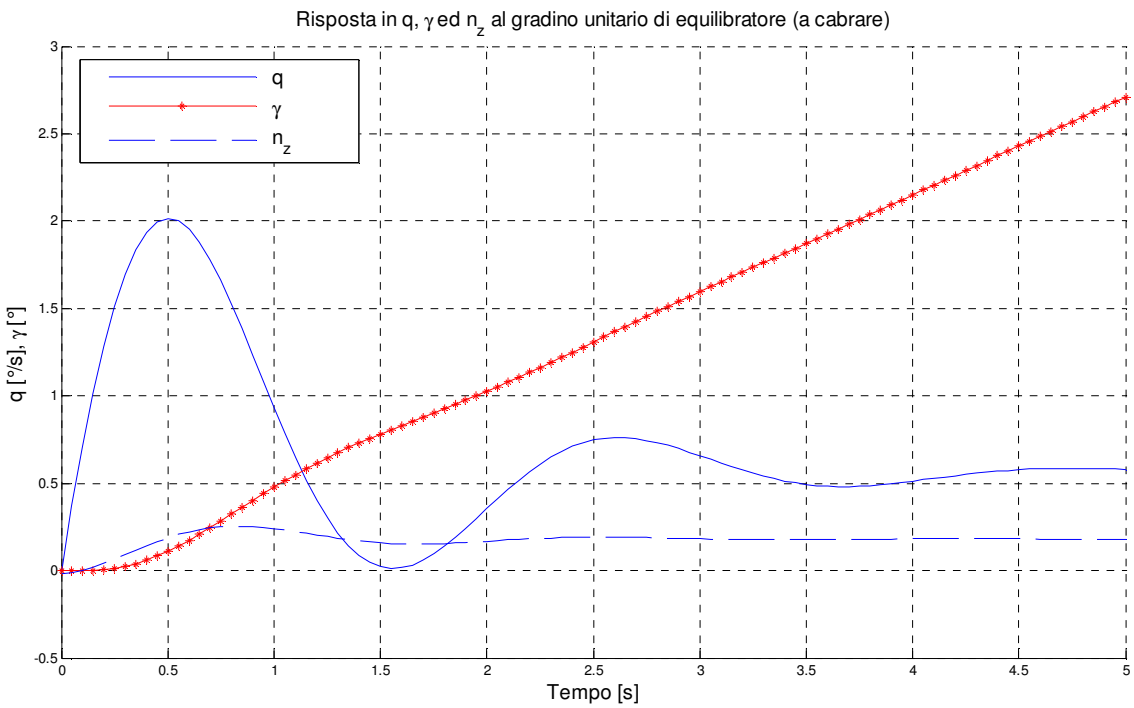


Figura 3.8Risposte in q e γ ed n_z al gradino di equilibratore

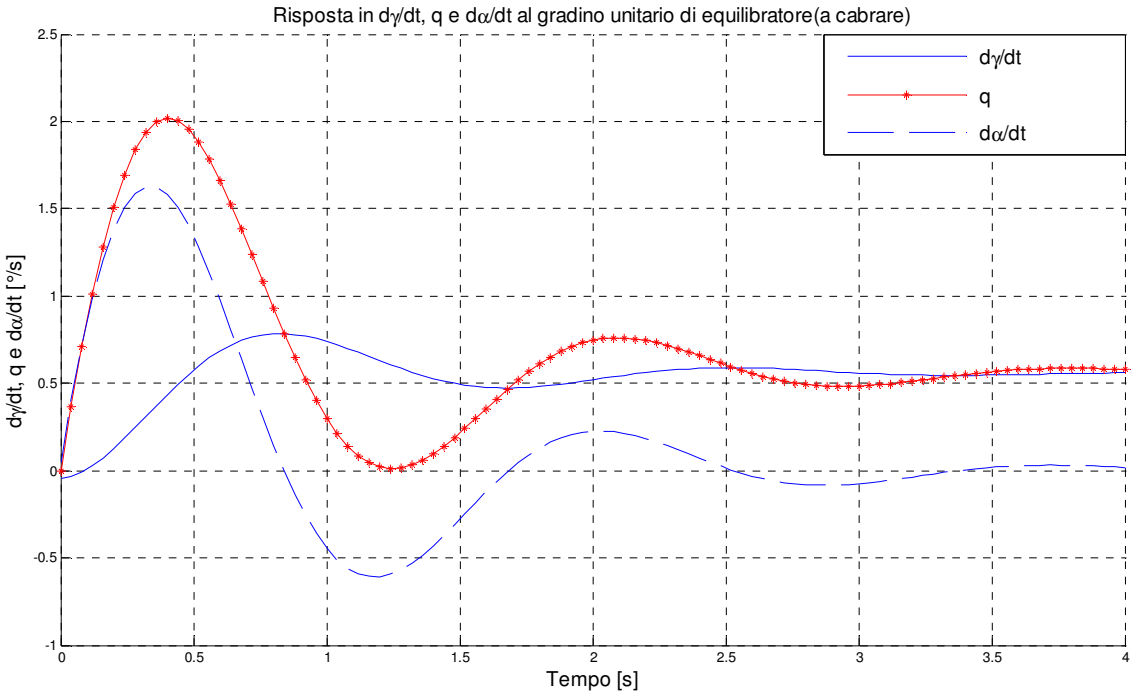


Figura 3.9 Risposte in q e $\dot{\gamma}$ ed $\dot{\alpha}$ al gradino di equilibratore

$$\frac{n_z}{\delta_e} = \frac{0.01565\ (s + 12.71)\ (s - 13.83)}{(s^2\ +\ 2.33s\ +\ 15.18)}$$

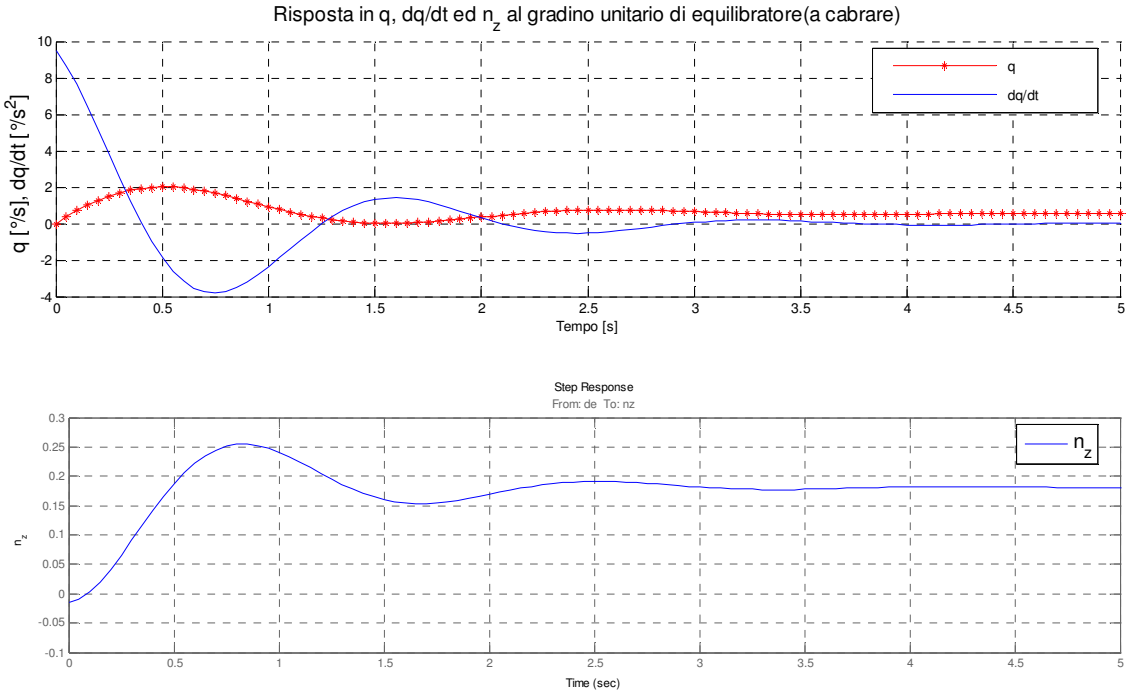


Figura 3.10 Risposte in q e $\dot{q}$ ed n_z al gradino di equilibratore

3.4 Specifiche e criteri di progetto

La progettazione di sistema di controllo del volo mira a fornire qualità di manovrabilità ottimali in tutte le fasi di missione e per tutti i punti dell'inviluppo di volo di un aeromobile.

Modellare la risposta del velivolo ai comandi, in modo tale che in ogni "*task*" di pilotaggio possano essere raggiunte da parte del pilota, con facilità e basso carico di lavoro, le prestazioni desiderate, non è un compito semplice. Esistono tuttavia, una serie di criteri di progettazione che forniscono ottime linee guida.

La risposta nel tempo ad un ingresso a gradino, fornisce uno strumento grafico molto utile per derivare informazioni sulla dinamica e sula manovrabilità di un velivolo.

I criteri di Gibson (Gibson Handling Qualities Criteria) ad esempio, sono basati proprio sulla risposta nel tempo ad un gradino finito. Due di essi sono il "Dropback Criterion" e il "Fly Path Time Delay Criterion".

Nel corto periodo, le risposte d'interesse ai fini di tali criteri sono quelle in α, $\dot{q}$, q,θ e γ e il loro andamento tipico, per un ingresso finito, è riportato in figura 3.12.

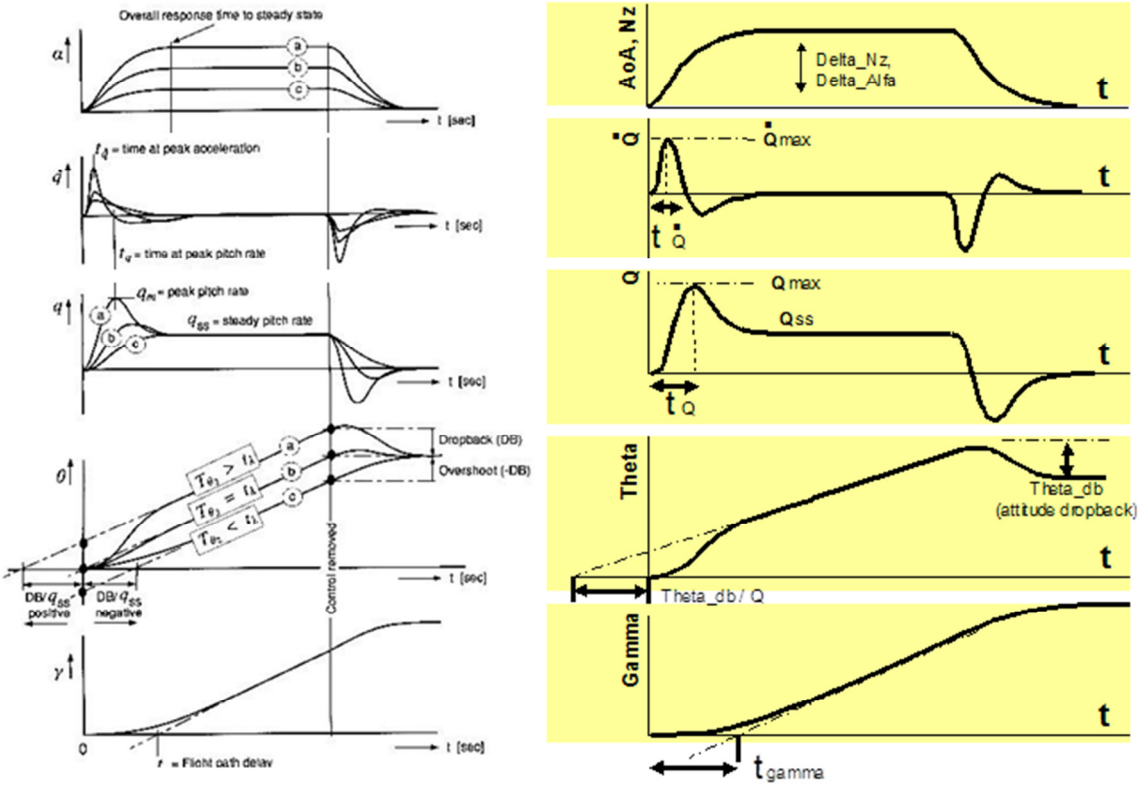


Figura 3.11 Criterio Dropback

PARAMETER	DETAIL	L1 CRITERION	L2/3 CRITERION	DESIGN TARGET
GENERAL FLIGHT				
Flight path response	T gamma	Figure	Figure	Figure
Response time delay	T Q-dot	0.18 sec	NONE	
APPROACH HANDLING				
Flight path response	T gamma	Figure	Figure	Figure
Response time delay	T Q-dot	0.18 sec	NONE	
Flightpath bandwidth	f_{135deg}	>0.13 Hz	NONE	
Pitch attitude response	Attitude dropback / Q	-0.25 to +0.8 s	NONE	L1* = -0.0 to +0.5s
Pitch rate overshoot	Q-max / Q-ss	< 2.25	NONE	L1* = < 1.5
Pitch rate delay	T Q-max	0.5 to 1.1 s	NONE	
Control Anticipation Param	Q-dot / g	< 40.0 deg/s2/g	NONE	< 20 deg/s2/g
SMALL-AMP INCEPTOR / INSTRUMENT TRACKING				
Response time delay	T Q-dot	0.18 sec	NONE	
Pitch attitude response	Attitude dropback / Q	-0.15 to +0.15 s	NONE	L1* = -0.1 to +0.1 s
Pitch rate overshoot	Q-max / Q-ss	< 2.0	NONE	L1* = < 1.5
Pitch rate delay	T Q-max	0.3 to 0.9 s	NONE	
Control Anticipation Param	Q-dot / g	< 25.0 deg/s2/g	NONE	< 20 deg/s2/g

Tabella 3.12 Specifiche di progetto per il criterio Dropback

3.4.1 Dropback Criterion

Imposto un ingresso a gradino finito, come indicato in figura 3.12, si definisce "attitude dropback" (DB), la differenza tra l'angolo d'assetto nell'istante in cui viene levato il comando e il valore che l'assetto raggiunge a regime. Un valore positivo di questa differenza è indicato come "dropback" (DB), mentre un valore negativo (-DB) come sovraelongazione.

Tale criterio è definito in termini di limiti su due parametri:

- Il rapporto tra il picco della velocità angolare di beccheggio e il valore di regime q_{max}/q_{ss}
- Il rapporto tra DB e la velocità angolare di beccheggio a regime: DB/q_{ss}

Questi due valori offrono indicazioni sulla qualità della risposta del velivolo al comando.

Il caso ideale sarebbe non avere alcun DB (caduta d'assetto levando il comando). In tal modo l'assetto, seguirebbe esattamente il comando. Il giudizio dei piloti al comportamento del velivolo è riportato nel piano $(DB/q_{ss}, q_m/q_{ss})$, come descritto in figura 3.13

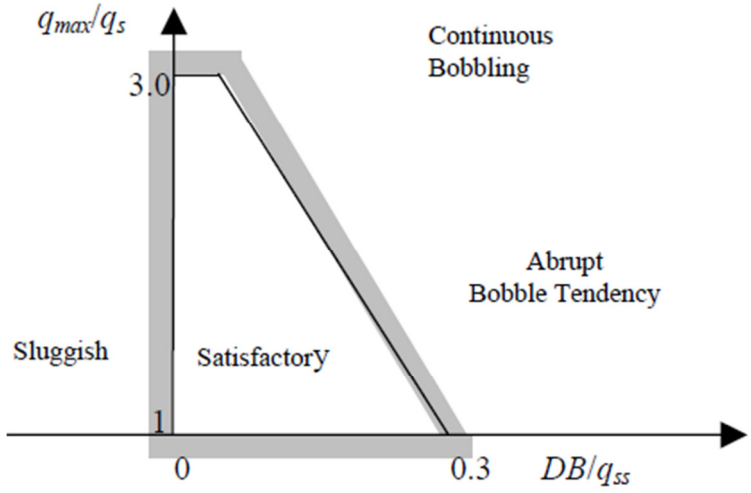


Figura 3.12

Un valore negativo del DB è indice di lentezza, mentre grandi valori positivi di DB indicano tendenza a brusche oscillazioni.

Si noti che è necessario un picco di sovraelongazione per q in quanto se fosse $q_m/q_{ss} \leq 1$ non si potrebbe entrare nella regione di giudizio "soddisfacente".

3.4.2 Fly Path Time Delay Criterion

Il secondo criterio nel dominio del tempo è il ritardo sulla pendenza della traiettoria t_γ

Graficamente è definito come l'intersezione tra l'asse del tempo e la retta tangente alla traiettoria quando raggiunge le condizioni stazionarie.

Fondamentalmente, t_γ è una misura del ritardo che si osserva tra l'ingresso del pilota e una risposta evidente della traiettoria .

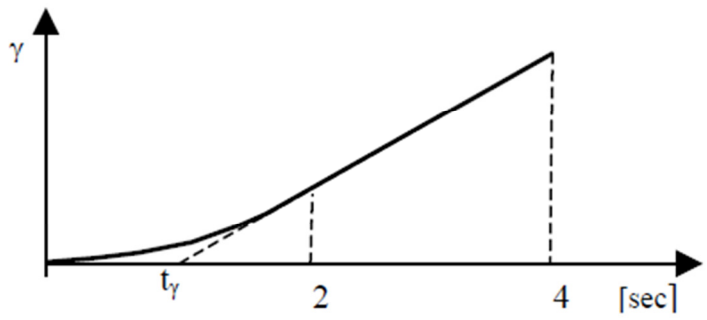


Figura 3.13 Ritardo sulla traiettoria

In [13] è suggerito che nelle fasi di atterraggio il ritardo $t_\gamma < 1{,}5\ s$ mentre nelle fasi in cui è richiesta alta precisione nel controllo dovrebbe essere $t_\gamma < 1\ s$

In figura 3.15 sono riportate le specifiche richieste per il ritardo massimo sulla traiettoria per il velivolo oggetto di studio.

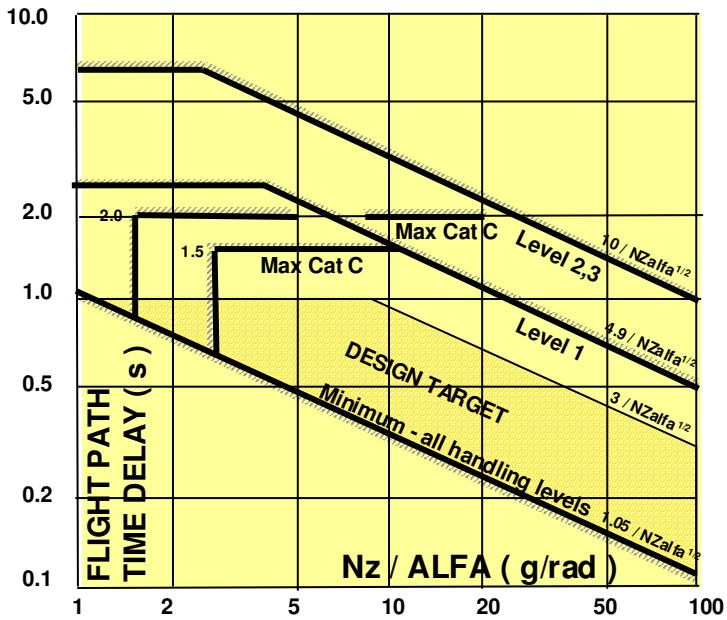


Figura 3.14 Specifiche di progetto per il criterio Fly Path Time Delay

Capitolo 4

4. Confronto tra approccio classico e metodo LQ

4.1 Sintesi mediante approccio classico

Nel capitolo precedente è stata analizzata la risposta in ciclo aperto del modello linearizzato del velivolo, durante il corto periodo. Si procede di seguito all'analisi in ciclo chiuso, mediante luogo delle radici e diagramma di Bode. L'analisi è stata condotta per la condizione di volo di riferimento definita dalla quota $h = 29300\, ft$ e Mach $M = 0.6$. Con tale approccio è necessario procedere alla chiusura dei rami in retroazione, un anello alla volta, partendo dall'anello più interno (cioè dal più rapido).

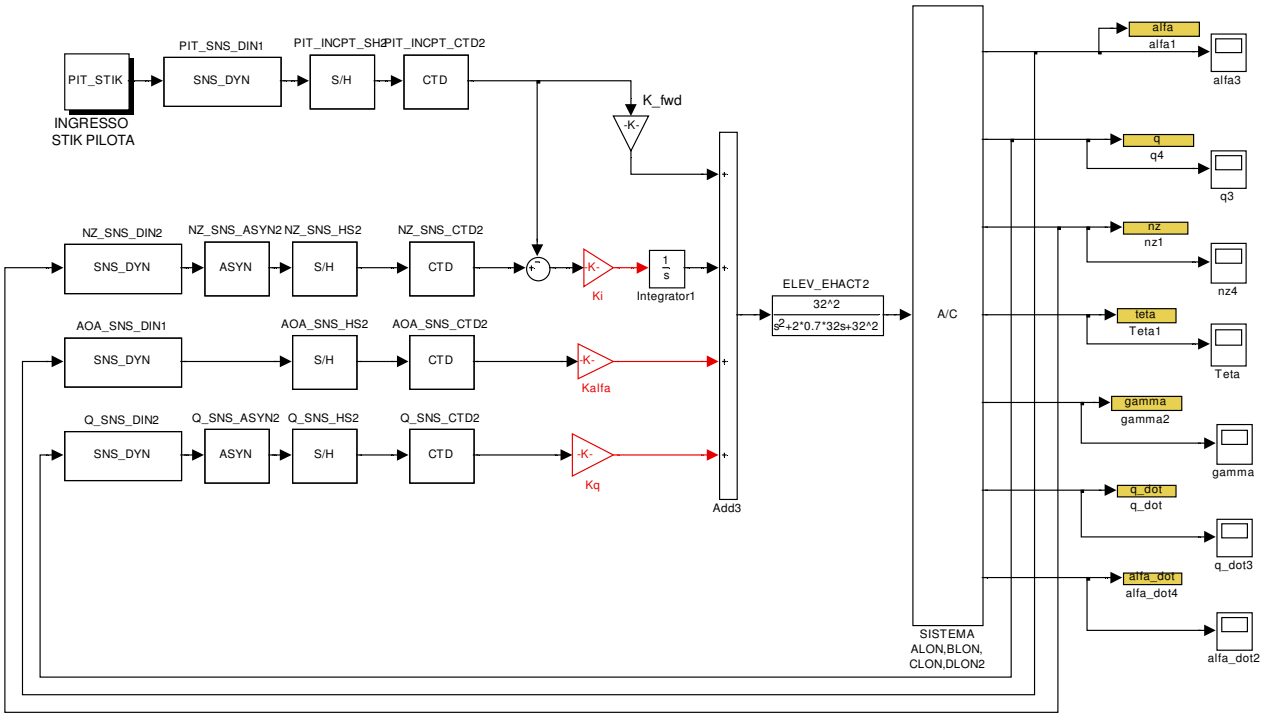


Figura 4.1-Schema in ciclo chiuso del CAS

Riproducendo lo schema del FCS in Simulink, aggiungendo il blocco A/C che racchiude la dinamica di corto periodo del velivolo rappresentata dalle matrici di stato, e retroazionando le uscite: n_z, α e q si è ottenuto lo schema del CAS riportato in figura 4.1.

Si noti che in questa fase di studio sono stati omessi volontariamente i filtri "*lead-lag*" presenti sul ramo feedforward e sul ramo del pitch damper. La loro funzione è quella di rendere più performante il sistema e verranno quindi trattati in una seconda fase, dopo aver determinato i guadagni d chiusura indicati con K_i, K_{alfa} e K_q.

Il primo passo per la sintesi è la chiusura dei SAS, in modo da ottenere i requisiti di smorzamento e pulsazione prescritti dalle norme sulle qualità di volo. Successivamente si procede alla chiusura dell'anello più esterno, garantendo il soddisfacimento delle specifiche prestazionali.

Il primo anello da chiudere è quello del pitch damper, necessario per far raggiungere al sistema un adeguato valore di smorzamento di corto periodo, tipicamente pari a 0.7.

Partendo quindi da una situazione in cui tutti gli anelli risultano aperti, lo schema da considerare è quello riportato in figura 4.2.

Lavorando in ambiente Simulink, un modo pratico per ottenere una funzione di trasferimento tra due punti del modello è quello di inserire in corrispondenza di essi una porta d'ingresso "In" ed una porta di uscita "Out" ed usare il comando '*linmod2*' di Matlab® che permette di ottenere una rappresentazione in variabili di stato, avente "In" come ingresso e "Out" come uscita. A titolo di esempio della procedura eseguita, si descrivono di seguito i principali passaggi eseguiti per determinare il guadagno del pitch damper.

Denominando lo schema Simulink riportato in figura 4.2 come: 'feedbackQ', mediante il comando: [Aq,Bq,Cq,Dq]=linmod2('feedbackQ') Matlab si ottengono le matrici di stato [Aq,Bq,Cq,Dq] per il sistema che ha come ingresso il blocco "In" e come uscita il blocco "Out". Note tali matrici, mediante il comando pitchdamper=ss(Aq,Bq,Cq,Dq) è stato costruito il modello in variabili di stato denominato "pitchdamper"; il comando "rlocus" ha infine permesso di disegnare il luogo delle radici riportato in figura 4.3.

I poli in ciclo aperto sono riportati in tabella 4.1. Scegliendo un valore di $k_q = 0.35$ è stato ottenuto uno spostamento dei poli verso sinistra su LHP. I valori di smorzamento e pulsazione riportati in tabella 4.2.

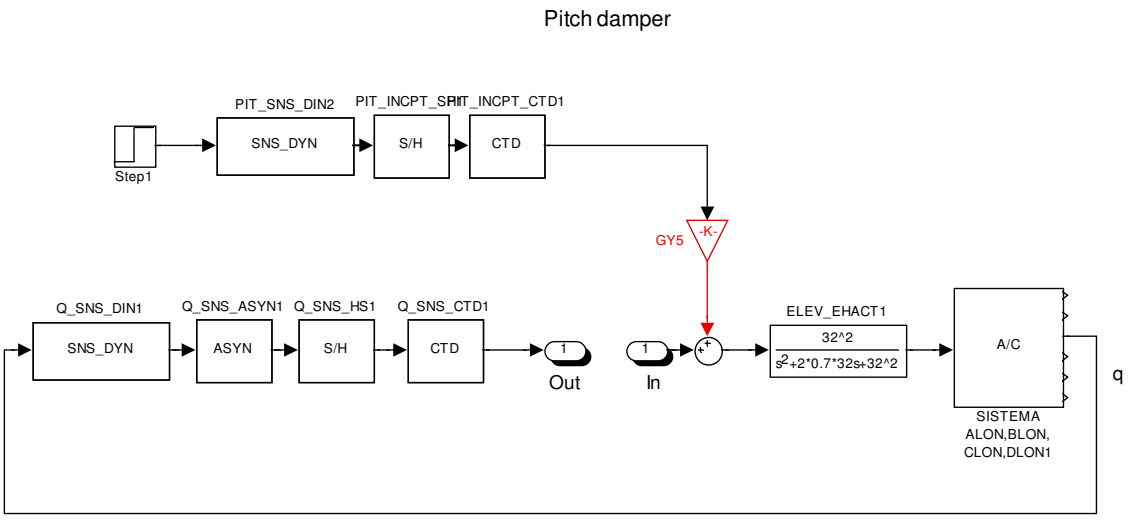


Figura 4.2 Schema del pitch damper

Poli	Damping ζ	Freq. ω_n(rad/s)
-1,1649 + 3,7175i	**0,29903**	**3,8957**
-1,1649 - 3,7175i	**0,29903**	**3,8957**
-22,4 + 22,853i	0,7	32
-22,4 - 22,853i	0,7	32
-30,1 + 30,708i	0,7	43
-30,1 - 30,708i	0,7	43
-30,1 + 30,708i	0,7	43
-30,1 - 30,708i	0,7	43
-160	1	160
-160	1	160
-200	1	200
-200	1	200
-320 +3,2912e-007i	1	320
-320 -3,2912e-007i	1	320
-320	1	320

Tabella 4.1 poli del pitch damper

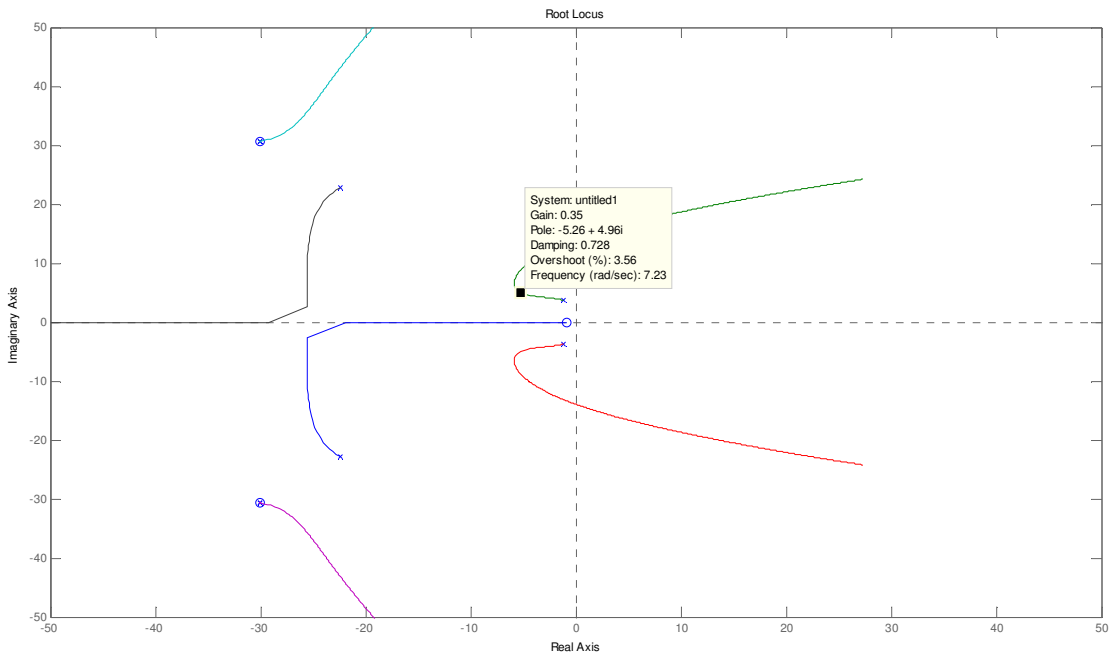


Figura 4.3 Luogo delle radici relativo al pitch damper

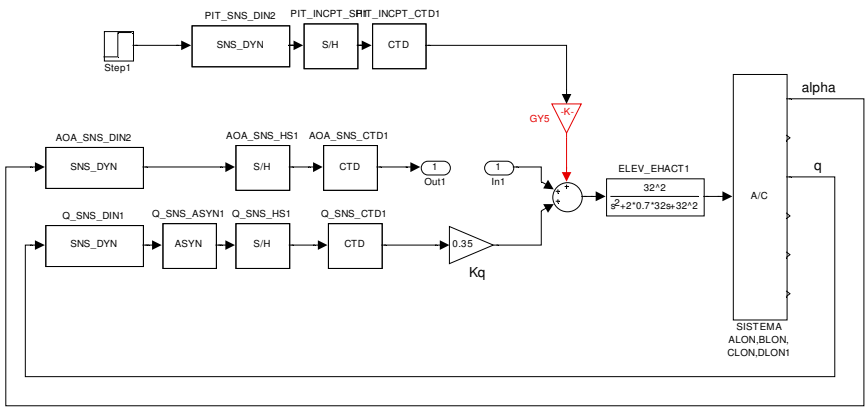


Figura 4.4 SAS in α

Una volta scelta la chiusura adeguata per il pitch damper, si è proceduto, secondo lo stesso criterio esposto in precedenza, alla chiusura del SAS in α.

In figura 4.5 è riportato il luogo delle radici del sistema, con il ramo del pitch damper chiuso. In figura 4.6 è un ingrandimento della zona dei poli di corto periodo.

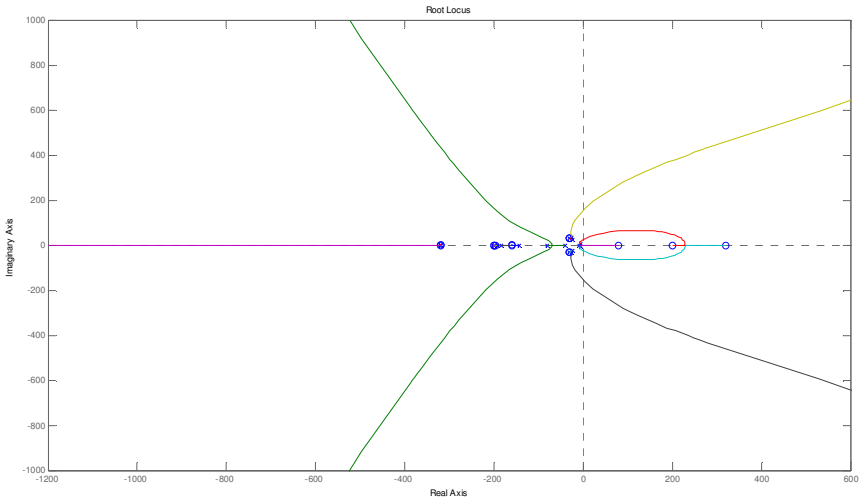


Figura 4.5 Luogo delle radici del SAS in alpha

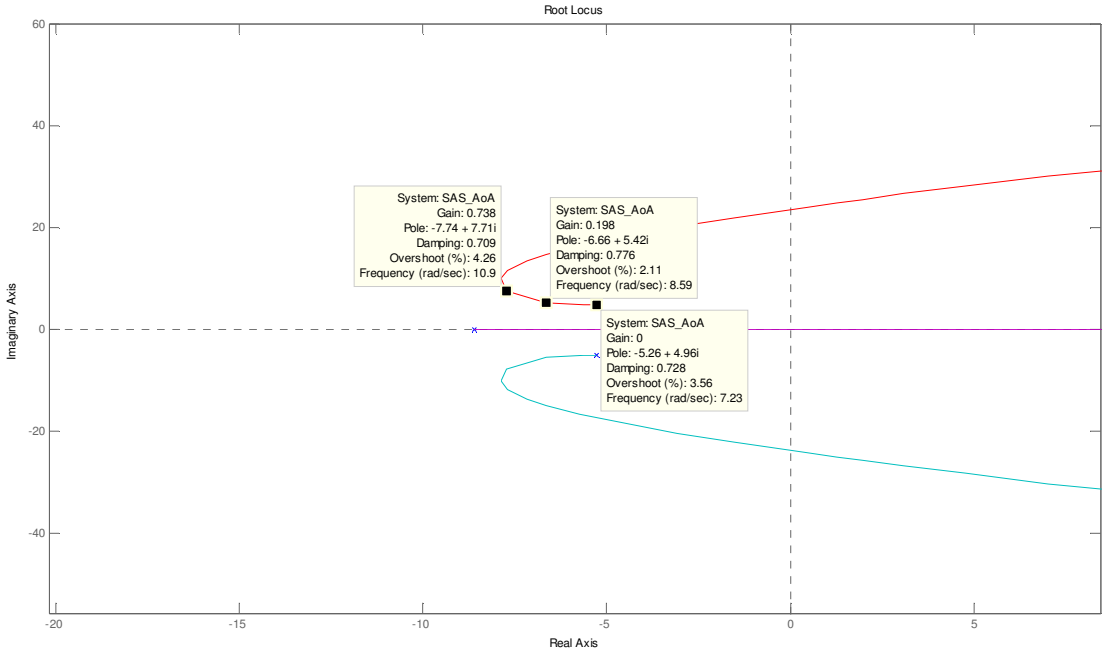


Figura 4.6 Ingrandimento intorno all'origine del luogo delle radici in alpha

Tabella 4.2 Poli di corto periodo dopo la chiusura del pitch damper

Poli	Damping ζ	Freq. ω_n(rad/s)
-5,2624 + 4,9573i	**0,72789**	**7,2297**
-5,2624 - 4,9573i	**0,72789**	**7,2297**

Come si vede dalla figura, un guadagno $K_\alpha = -0.2$, permette di incrementare un po' lo smorzamento e la pulsazione, pur mantenendo contenuta la sovraelongazione. Anche in tal caso i poli si spostano verso il semipiano sinistro.
I risultati di tale chiusura sono riportati in tabella 4.3[8].

Poli	Damping ζ	Freq. ω_n(rad/s)
-5,3813	1	5,3813
-6,6717 + 5,4329i	**0,77542**	**8,604**
-6,6717 - 5,4329i	**0,77542**	**8,604**
-23,203 + 23,573i	0,7015	33,076
-23,203 - 23,573i	0,7015	33,076
-25,305 + 36,263i	0,57226	44,219
-25,305 - 36,263i	0,57226	44,219
-30,1 + 30,708i	0,7	43
-30,1 - 30,708i	0,7	43

Tabella 4.3 Poli con SAS in alfa chiuso

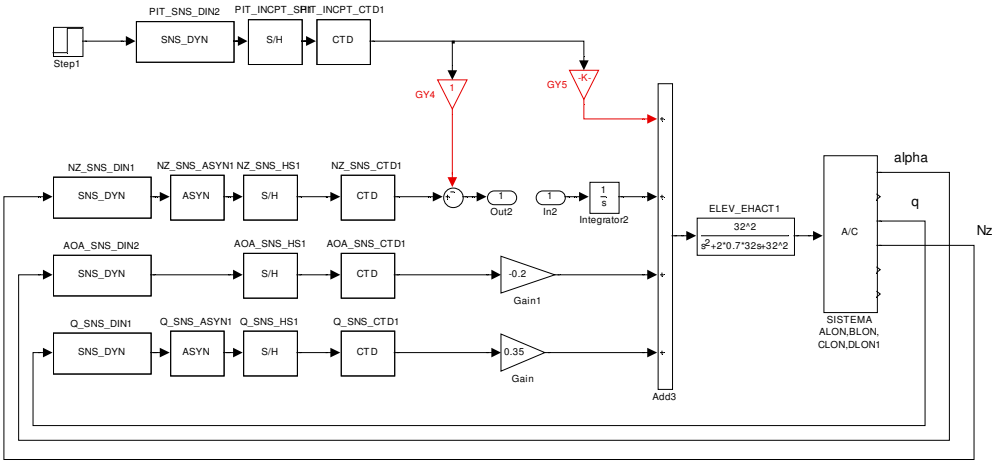


Figura 4.7 Modello per la chiusura della retroazione di n_z

[8] In tabella 4.3 non sono stati riportati tutti i poli. Sono stati omessi i poli molto distati dall'asse immaginario, su LHP.

Procedendo analogamente a quanto fatto fin'ora, per l'ultimo ramo da chiudere lo schema di partenza è quello riportato in figura 4.7. In figura 4.8 è riportato il luogo delle radici del sistema di figura 4.7, al variare del guadagno K_i.

Chiudendo il sistema con un guadagno $K_i = 6.5$ si ottiene una risposta con caratteristiche di smorzamento e pulsazione riportate in tabella 4.4.

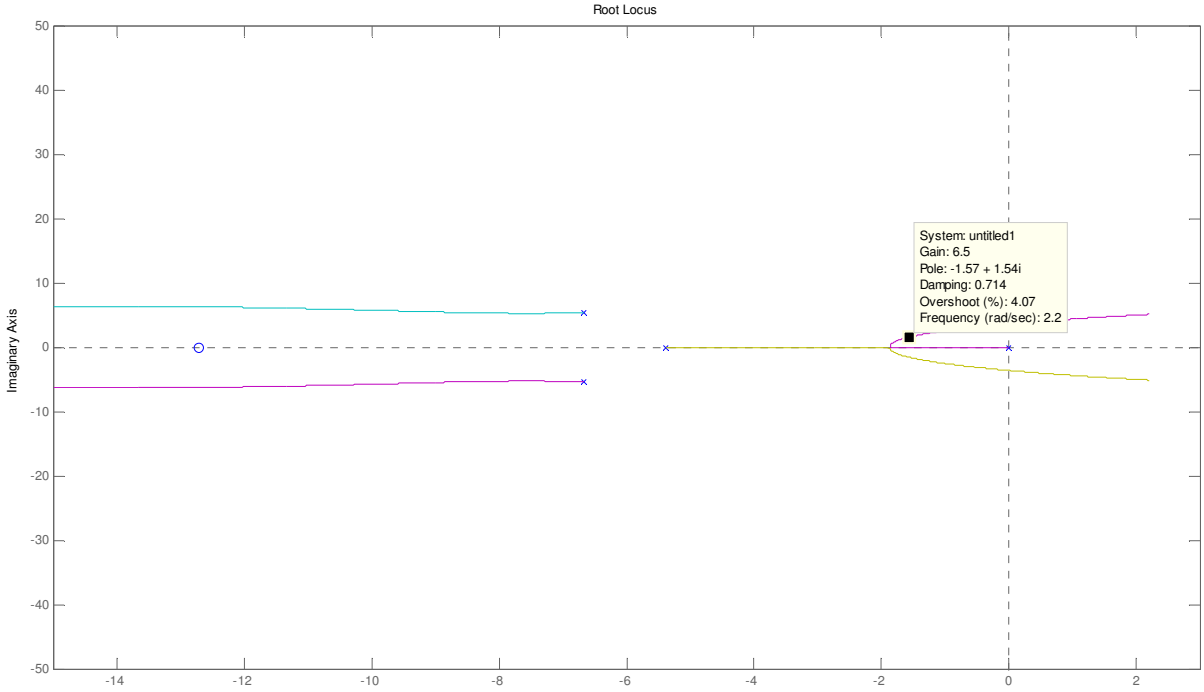


Figura 4.8 Luogo delle radici del sistema al variare di K_i

Poli	Damping ζ	Freq. ω_n(rad/s)
0	-1	0
-1,5688 + 1,54i	**0,71364**	**2,1984**
-1,5688 - 1,54i	**0,71364**	**2,1984**
-8,0222 + 5,2901i	0,83483	9,6094
-8,0222 - 5,2901i	0,83483	9,6094
-23,206 + 23,573i	0,70154	33,079
-23,206 - 23,573i	0,70154	33,079
-25,364 + 36,146i	0,5744	44,157
-25,364 - 36,146i	0,5744	44,157
-30,1 + 30,708i	0,7	43
-30,1 - 30,708i	0,7	43
-30,1 + 30,708i	0,7	43
-30,1 - 30,708i	0,7	43
-39,559	1	39,559
-79,989	1	79,989
-142,61	1	142,61
-160	1	160
-160	1	160
-182,2	1	182,2
-192,79	1	192,79
-200	1	200
-200	1	200
-200	1	200
-320	1	320
-320	1	320
-320	1	320
-320	1	320
-320,06	1	320,06

4.4 Poli del sistema in ciclo chiuso

Introducendo nel modello, una porta d'ingresso "In" in corrispondenza dell'ingresso pilota e una porta d'uscita "Out" in corrispondenza dell'uscita n_z, sempre tramite il comando "l*inmod2*", si è ottenuto il modello in variabili di stato del sistema in ciclo chiuso. Successivamente è stata ricavata la funzione di trasferimento $n_z/\delta_{pitstik}$, tra l'ingresso di riferimento "SIM_PIT_STICK", indicato con $\delta_{pitstik}$ e l'uscita n_z.

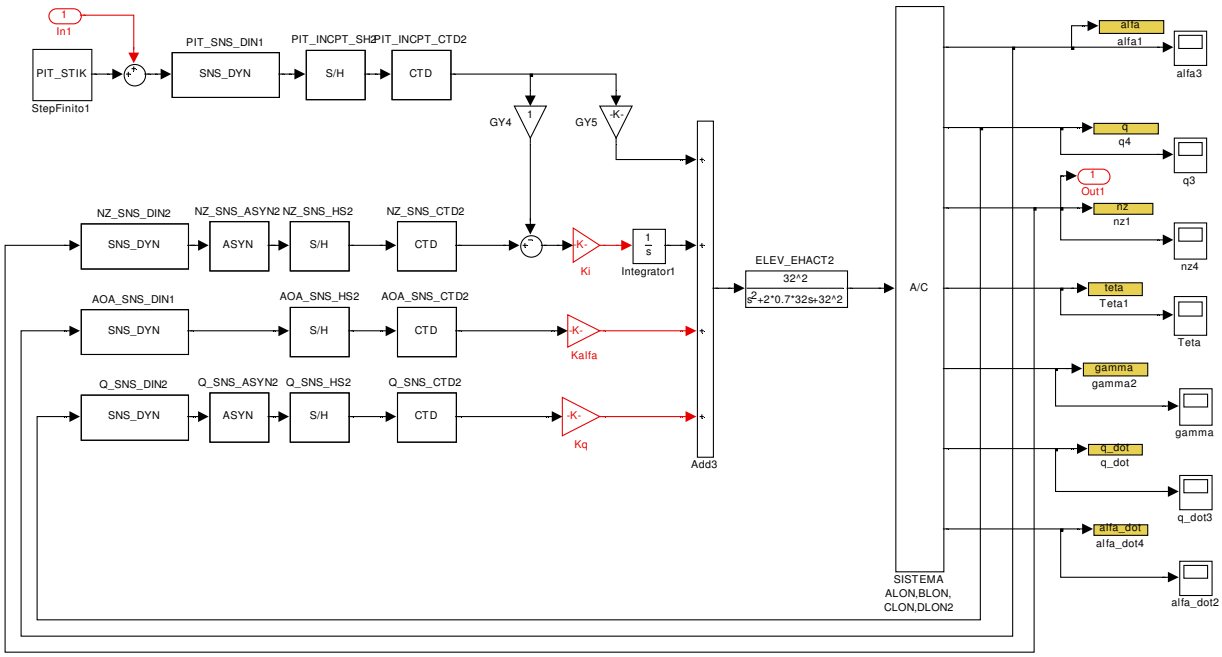


Figura 4.9 Schema del CAS

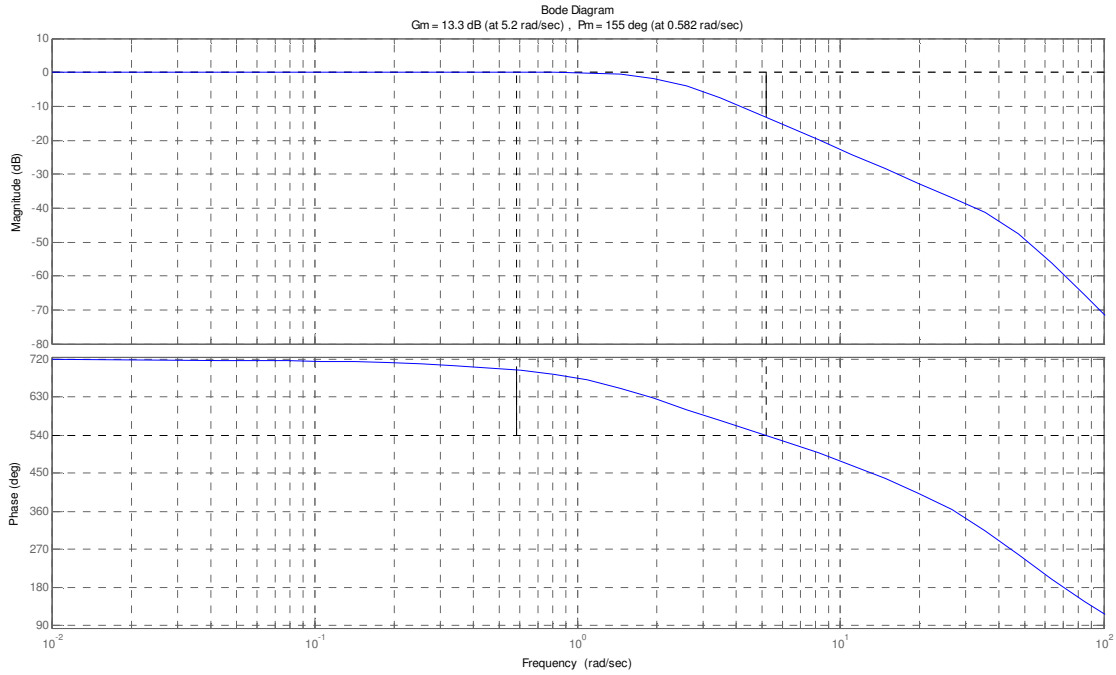


Figura 4.10 Diagramma di Bode in ciclo chiuso per la funzione di trasferimento $n_z/\delta_{pitstik}$

In figura 4.10 è riportato il diagramma di Bode per il sistema, in ciclo chiuso. Il sistema mostra un margine di guadagno Gm = 13.3 dB (a 5.2 rad/sec) e un margine di fase Pm = 155

deg (at 0.582 rad/sec). Di conseguenza sono ampiamente soddisfatti i requisiti di stabilità e robustezza.
Le risposte temporali per un ingresso a gradino unitario, sono riportate nelle figure 4.19-4.26, confrontate con quelle ottenute col metodo LQTOF.

4.2 Approccio LQTOF

Il progetto del Control Augmentation System, precedentemente condotto mediante il metodo classico è affrontato in questo paragrafo seguendo l'approccio LQTOF. L'impostazione teorica del problema è stata affrontata nel capitolo 2.3 al termine del quale, nella tabella 2.2 sono state riportate le equazioni di progetto usate per ricavare la matrice dei guadagni che ottimizza l'indice di prestazione J. In appendice B1 è riportata la procedura realizzata in Matlab® e denominata "track" che permette di eseguire l'ottimizzazione LQTOF.
In questo paragrafo sono descritte le fasi di:

- Trasformazione del modello di figura 4.9 in uno descritto interamente in variabili di stato, allo scopo di poter applicare il metodo LQTOF
- Scelta di un indice di prestazione J adatto al problema da affrontare
- Scelta di un metodo di minimizzazione del funzionale J

Si noti che anche in tal caso, si sono tenuti fuori dalla sintesi i filtri *lead-lag* per trattarli in un secondo momento, al fine di migliorare le prestazioni del sistema.
Scopo della sintesi è quindi determinare, ancora una volta, i guadagni evidenziati K_q , K_{alfa} e K_i evidenziati in rosso in figura 4.9.

4.2.1 Trasformazione del modello in variabili di stato

Per poter applicare le metodologie LQ riportate nel secondo capitolo, un passo fondamentale da compiere è quello di trasformare lo schema del CAS di figura 4.9, in uno equivalente riportato in figura 4.11 e interamente descritto in variabili di stato.
Come visto in precedenza, il modello degli attuatori e dei sensori è noto in termini di funzioni di trasferimento mentre quello del velivolo è già assegnato in variabili di stato.

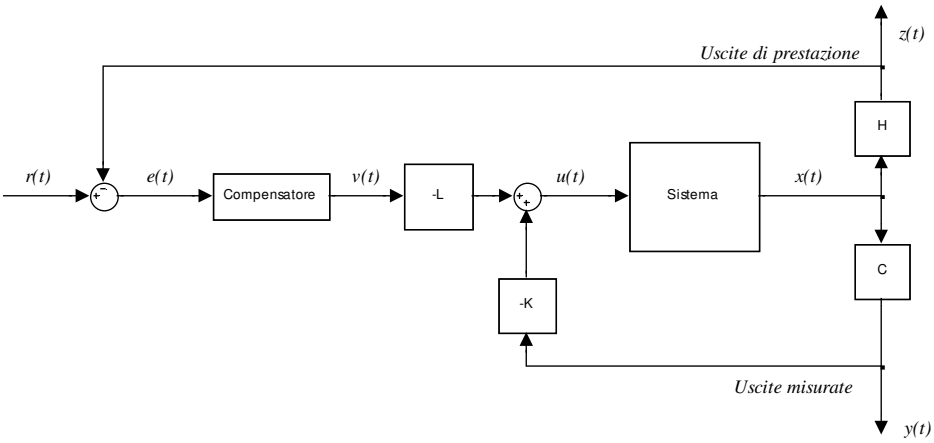


Figura 4.11 Sistema in variabili di stato con compensatore di qualsiasi struttura

In appendice D, è riportata la procedura realizzata in Matlab®, che date in ingresso le matrici di stato del velivolo in una precisa condizione di volo, i modelli realizzati in Simulink dell'attuatore, dei sensori, e del compensatore, restituisce il modello completo di tutto il sistema, in variabili di stato. La procedura è stata realizzata come descritto di seguito.

Come esempio del metodo usato, si considerino due sistemi definiti in variabili di stato $sys1$ e $sys2$ (definiti dalle equazioni 4.2-1), disposti in serie come in figura 4.11.

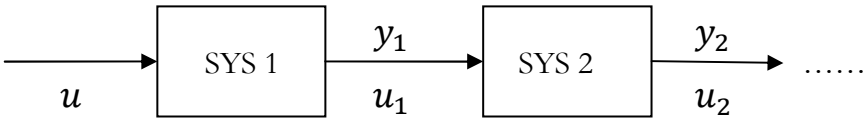


Figura 4.12 Sistemi dinamici in serie

$$sys1 = \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u \end{cases} \qquad sys2 = \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_1 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_1 \end{cases} \qquad 4.2\text{-}1$$

Con A_i matrice di dimensioni $[n_i \times n_i]$, B_1 $[n_i \times m_i]$ e C_i e D_i rispettivamente $[r_i \times n_i]$ e $[r_i \times m_i]$ con $i = 1,2$.

Mettendo insieme le equazioni della dinamica dei due sistemi si ottiene il sistema 4.2-2:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_1 \end{cases} \qquad 4.2\text{-}2$$

Considerando che: $u_1 = y_1 = C_1 x_1 + D_1 u$ la seconda equazione può essere scritta come in 4.2-3:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 (C_1 x_1 + D_1 u) \end{cases} \qquad 4.2\text{-}3$$

Ampliando la matrice di stato e quella degli ingressi, e definendo i nuovi vettori di stato e ingresso, le equazioni 4.2-3 possono essere viste come un unico sistema dinamico descritto come segue:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} u \qquad 4.2\text{-}4$$

$$y_2 = C_2 x_2 + D_2 C_1 x_1 + D_2 D_1 u \qquad 4.2\text{-}5$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 D_1 \end{bmatrix} u \qquad 4.2\text{-}6$$

Ponendo infine:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}_{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)} \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix}_{(n_1+n_2)\times(m_1+m_2)}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix}_{(r_1+r_2)\times(n_1+n_2)} \qquad D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 D_1 \end{bmatrix}_{(r_1+r_2)\times(m_1+m_2)}$$

le equazioni 4.2-4 e 4.2-6, in fine, possono essere scritte in forma compatta nel modo canonico.

Identificando i sistemi $sys1$ e $sys2$ con i modelli dell'attuatore e del velivolo, sono state ottenute le matrici di stato del sistema velivolo-attuatore. Note tali matrici lo schema di figura 4.9 è stato sostituito con uno equivalente riportato in figura 4.13. Inoltre, al fine di dare allo schema di figura 4.9 un aspetto più simile a quello di figura 4.11, sono stati racchiusi nei blocchi: sens_accel, sens_alfa, sens_nz e sens_q tutti gli elementi in serie sulle rispettive linee di retroazione, come mostrato in figura 4.14.

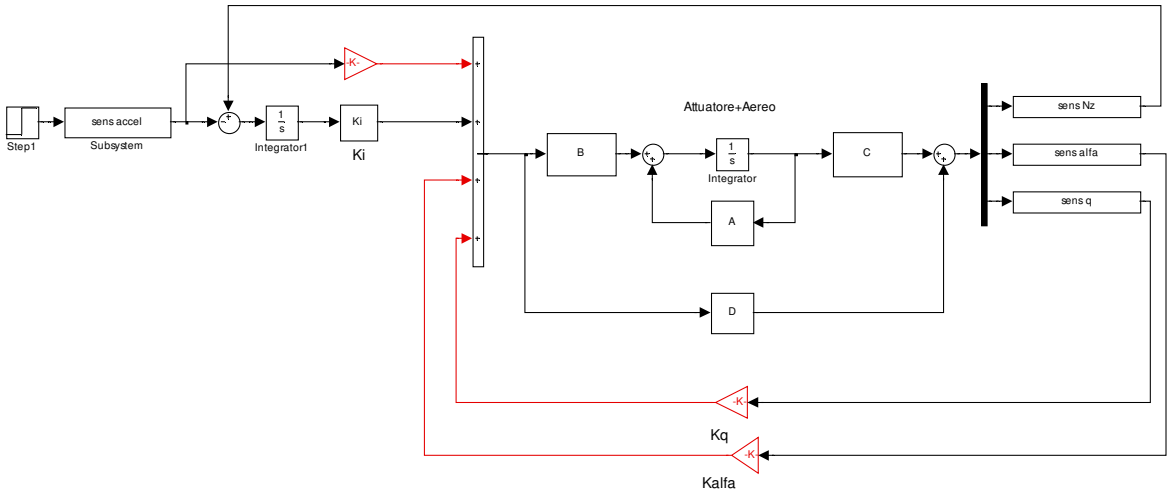


Figura 4.13 Schema di controllo :velivolo e attuatore rappresentati in unico sistema in variabili di stato

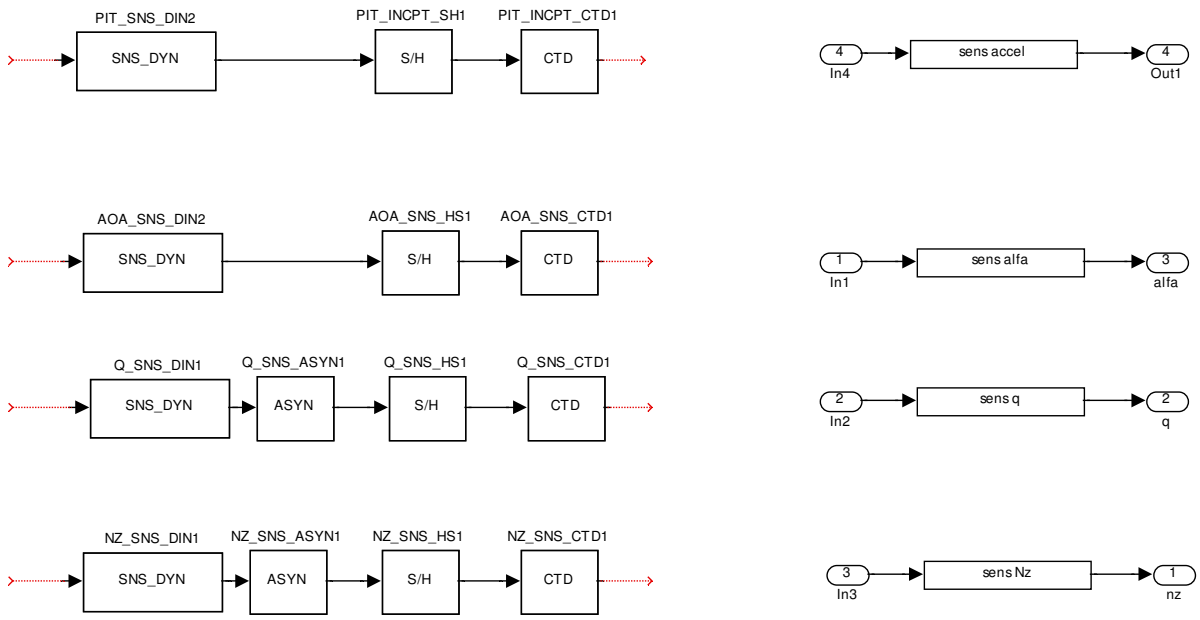


Figura 4.14 Rappresentazione compatta degli elementi in serie

A questo punto confrontando le figure 4.11 e 4.13, per analogia, appare evidente che il blocco "*compensatore*" trova come elemento equivalente l'integratore mentre la matrice dei guadagni L, il guadagno K_i.

Sempre con l'ausilio del comando "*linmod2*" di MATLAB® sono state ottenute in modo rapido le matrici di stato degli elementi riportati in figura 4.14. In fine, il modello in variabili di stato del sistema velivolo-attuatore descritto dalle matrici (A,B,C,D) è stato ampliato inserendo la dinamica dei blocchi rappresentati in figura 4.14, seguendo la procedura descritta in precedenza.

Avendo ottenuto tutto il sistema *attuatori- velivolo-sensori* in termini di variabili di stato, lo schema 4.13 è stato ridisegnato come in figura 4.15, in cui il contenuto del blocco "*Plant var_stato*" è riportato in figura 4.16.

Le uscite dal sistema sono state separate tra quelle destinate a chiudere i SAS in α e q, e l'uscita di prestazione n_z è stata retro azionata sul riferimento. In tal modo sono rimaste definite le matrici $C_{misurate}$ e $H_{prestazione}$.

Come si nota nello schema di figura 4.15, a differenza di quello riportato in figura 4.11, è presente il ramo "feedforword" che dall'ingresso di riferimento va ad agire direttamente sul blocco contenente la dinamica del velivolo, quella degli attuatori e quella dei sensori. Ciò comunque, di fatto non ha rilevanza sul metodo.

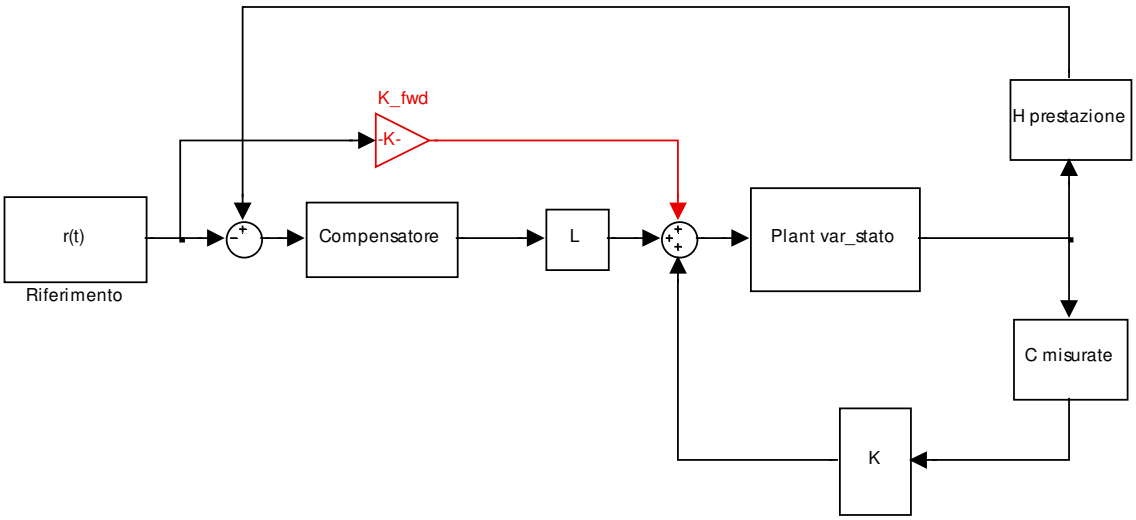


Figura 4.15 Modello del CAS ridotto

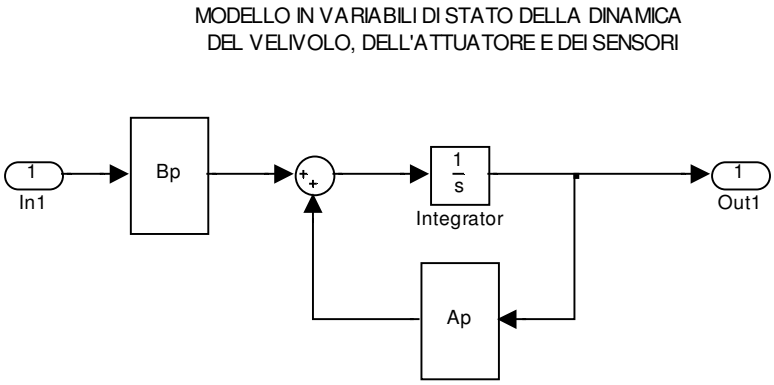


Figura 4.16Modello in variabili di stato, del sistema velivolo-attuatore-sensori

Come visto nel capitolo 2, uno dei vantaggi offerti dal metodo LQTOF è quello di poter inserire la dinamica del compensatore (avente qualsiasi struttura) all'interno del processo di ottimizzazione.

Seguendo la procedura indicata nel paragrafo 2.3.1, è stata inserita la struttura del compensatore all'interno del modello in variabili di stato del velivolo, già ampliato della dinamica dei sensori e dell'attuatore. Nel caso in esame, la struttura del compensatore è banale, essendo rappresentata da un semplice integratore.

Lo schema che deriva inserendo la dinamica del compensatore è riportato in figura 4.17.

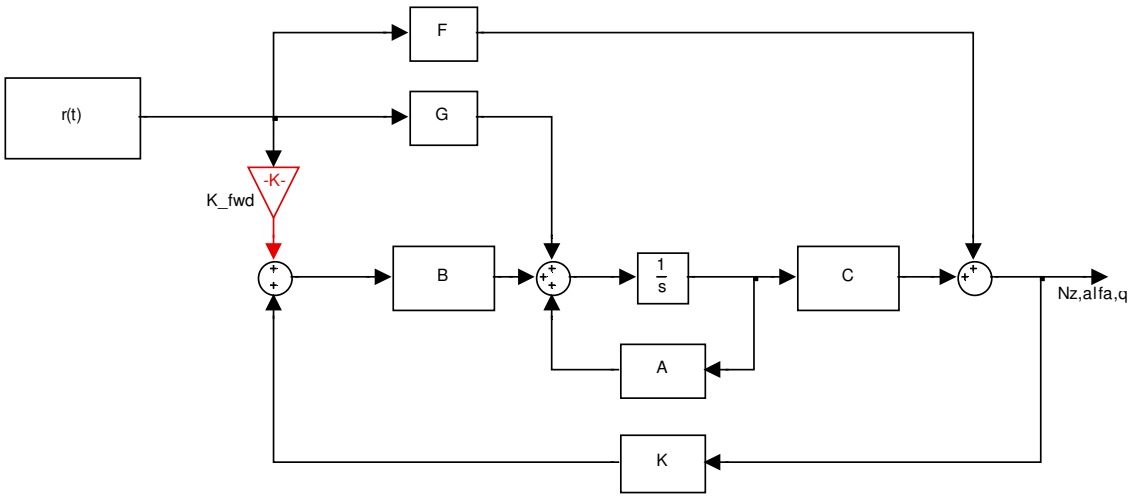


Figura 4.17 Sistema completo in variabili di stato

Per riportarsi al caso del paragrafo 2.3.2, è stata sostituita la matrice G con la matrice $K_{fwd}B + G$.

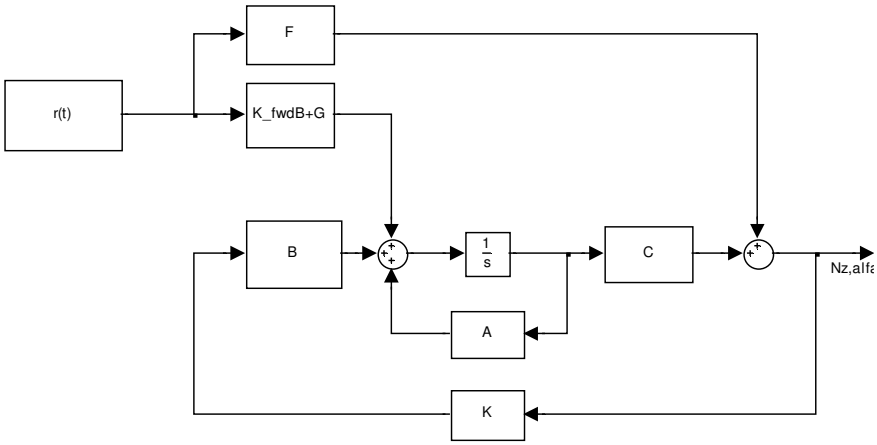


Figura 4.18

Le equazioni 4.2-7 rappresentano le equazioni della dinamica di tutto il sistema

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} + G\boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} + F\boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{z} = H\boldsymbol{x} \end{cases} \qquad 4.2\text{-}7$$

Lo *script* che esegue la procedura descritta e le matrici che compaiono nelle 4.2-7, relative alla condizione di volo di riferimento[9] sono riportate in appendice D.

4.2.2 Scelta dell'indice $\boldsymbol{PI}$ e della matrice dei guadagni iniziali $\boldsymbol{K_0}$

Come visto nel paragrafo 2.3.4, l'indice di prestazione nel caso del problema dell'inseguimento di un segnale di riferimento è dato dall'equazione 4.2.7

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\tilde{\boldsymbol{e}}^T\tilde{\boldsymbol{e}} + \tilde{\boldsymbol{u}}^T R\tilde{\boldsymbol{u}})dt + \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{e}}^T V\bar{\boldsymbol{e}} \qquad 4.2.7$$

avendo indicato con: $\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{z}(t)$ l'errore tra il riferimento e l'uscita di prestazione, mentre con $\bar{e}$ l'errore a regime.

Si ricorda inoltre che il simbolo$(\tilde{\ldots})$, rappresenta il sistema delle deviazioni definito come differenza tra le variabili al tempo t e le medesime in condizioni stazionarie, indicate con una barra di soprassegno $(\bar{\ldots})$.

Con questa scelta dell'indice di prestazione, gli unici parametri di progetto sono R e V.

L'ultimo termine al secondo membro della 4.2.7 serve per garantire che l'errore a regime sia nullo. In realtà il sistema da controllare è di tipo I, cioè ha un integrale sulla linea d'ingresso. Ciò è già sufficiente a garantire l'annullamento dell'errore a regime. Di conseguenza, il termine $\frac{1}{2}\bar{e}^T V\bar{e}$ può essere omesso o, in modo del tutto equivalente, può essere assunto $V = 0$ nelle equazioni di progetto riportate in tabella 2.2.

Quindi l'indice di prestazione diventa:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\tilde{e}^T\tilde{e} + \tilde{u}^T R\tilde{u})dt \qquad 4.2.8$$

Per semplificare la procedura di sintesi, si è scelto di pesare gli elementi del vettore della deviazione sul controllo $\tilde{u}$, tutti allo stesso modo. In tal caso la matrice R può essere scritta come $R = \rho I$ con ρ parametro scalere e I matrice identità.

Ricordando inoltre che $\tilde{\boldsymbol{e}}(t) = H\tilde{\boldsymbol{x}}$ risulta:

[9] Quota 29300 ft, M=0,6 AoA=0

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(\tilde{\boldsymbol{x}}^T H^T H\, \tilde{\boldsymbol{x}} + \rho\tilde{\boldsymbol{u}}^2\,)dt \qquad 4.2.9$$

Con questa definizione del PI, formalmente, l'unico parametro di progetto è ρ.

Per applicare le equazioni di progetto riportate in tabella 2.2 basta porre $Q = H^T H$. A questo punto dato che H è nota, lo è anche la matrice Q.

Dopo vari tentativi, il risultato ottimali per le risposte del sistema si sono ottenute per $\rho = 0.01$ e la matrice Q riportata in appendice D.

Per inizializzare l'algoritmo di minimizzazione si possono applicare i metodi descritti nel paragrafo 2.5.

Le equazioni di progetto sintetizzate nella tabella 2.2, sono state implementate in Matlab® come descritto nelle appendici B4 e B5.

Nella procedura di ottimizzazione, ogni volta che si cambia la condizione di volo, è necessario inizializzare l'algoritmo di calcolo con un set di guadagni di partenza. La strategia usata è stata quella di inizializzare la procedura con i guadagni di ottimo della condizione di volo più vicina. Per la prima condizione di volo trattata ($M = 0.45$) è stato scelto invece solo il segno che dovrebbero avere i guadagni di ogni ramo, con retroazione unitaria. Quindi, ad esempio, come matrice dei guadagni iniziale per la condizione di volo $M = 0.6$ è stata schelta quella di ottimo per la condizione $M = 0.45$ ossia:

$K_{ottimo}^{0.45} = K_0^{0.6}$		
$\boldsymbol{K_q} = 0.56876$	$\boldsymbol{K_\alpha} = 0.49521$	$\boldsymbol{K_i} = 14.311$

Tabella 4.5 Matrice di inizializzazione per la condizione di volo M=0.6

4.2.3 Algoritmo usato per minimizzare l'indice di prestazione (PI)

Oggetto del paragrafo non è la trattazione rigorosa del metodo di ottimizzazione usato, condotta in dettaglio in [4], si vuole comunque motivare la scelta dell'algoritmo adottato, riportandone i principali pregi.

Per la ricerca del minimo dell'indice PI, si è scelto un metodo a "*metrica variabile*" anche detto "*Quasi Newton*". I principali aspetti negativi del metodo di Newton derivano da una parte dalla difficoltà di calcolare la matrice hessiana $\mathbb{H}$ e, dall'altra dalla necessità di doverla invertire ad ogni passo. Ciò potrebbe creare problemi computazionali dal momento che le derivate sono calcolate per differenzazione numerica. Per ovviare a tale inconveniente, sono stati introdotti metodi nei quali la matrice $\mathbb{H}$ o direttamente la sua inversa, è sostituita da un'opportuna matrice definita positiva e aggiornata ad ogni passo sula base dei risultati ottenuti al passo precedente. Vi sono diverse metodologie di aggiornamento delle matrici hessiane, i più usati sono:

- Il metodo di *Broyden,Fletcher,Goldfarb e Shanno* (*BFGS*)
- Il metodo di *Davidon,Fletcher e Powell (DFP)*

Nel presente lavoro è stato usato il metodo DFP. Con tale metodo anziché calcolare iterativamente la matrice $\mathbb{H}$, viene calcolata direttamente la sua inversa $\mathbb{H}^{-1}$. Il vantaggio è il risparmio di tempo computazionale legato all'inversione.
L'idea di base del metodo è costruire una successione di matrici $\mathbf{H_i}$ con la proprietà che:

$$\lim_{i\to\infty} \mathbf{H_i} = \mathbb{H}^{-1} \qquad 4.2.10$$

La ragione per cui i metodi a metrica variabile sono anche detti: metodi " *Quasi Newton*" si può spiegare nel modo seguente.
Volendo determinare un minimo col metodo di Newton, bisogna ricercare i valori per cui si annulla il gradiente della funzione. Vicino tali punti $\mathbf{x_i}$, è possibile approssimare la funzione al secondo ordine come:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_i}) + (\mathbf{x} - \mathbf{x_i}) \cdot \nabla f(\mathbf{x_i}) + \frac{1}{2}\,(\mathbf{x} - \mathbf{x_i}) \cdot \mathbb{H} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_i}) \qquad 4.2.11$$

Così:

$$f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x_i}) + \mathbb{H} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_i}) \qquad 4.2.12$$

Col metodo di Newton per determinare il nuovo punto dell'iterazione, bisogna porre $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ e quindi dalla 4.2.12 si ottiene:

$$\mathbf{x} - \mathbf{x_i} = -\mathbb{H}^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x_i}) \qquad 4.2.13$$

Il termine al primo membro rappresenta il passo di cui spostarsi per determinare un nuovo punto di minimo.

Il termine al secondo membro è noto se, la successione definita dalla 4.2.10, ha prodotto una matrice $\mathbf{H} \approx \mathbb{H}^{-1}$. Il fatto di usare una matrice $\mathbf{H}$ che è *quasi* la matrice hessiana, rende ragione del nome del metodo.

Esistono inoltre dei vantaggi ulteriori nello scegliere una matrice che approssimi $\mathbb{H}$ e non proprio essa stessa. Si consideri una direzione di decrescita della funzione $f(\mathbf{x})$, partendo dal punto $\mathbf{x_i}$, indicata con $\boldsymbol{p}$. Essendo una direzione di discesa, dovrà essere: $\nabla f \cdot \boldsymbol{p} < 0$. Prendendo come direzione $\boldsymbol{p}$ proprio quella definita dal metodo di Newton con l'equazione 4.2.13, si ha:

$$\nabla f(\mathbf{x_i}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_i}) = -(\mathbf{x} - \mathbf{x_i}) \cdot \mathbb{H} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_i}) < 0 \qquad 4.2.13$$

D'altra parte l'equazione 4.2.13 risulta verificata sol se $\mathbb{H}$ è definita positiva. Se ciò non fosse prendere il passo di Newton potrebbe portare in un punto in cui la funzione risulti incrementata rispetto al punto di partenza.

L'idea del metodo "Quasi Newton" è quella di partire da una matrice simmetrica definita positiva che approssimi $\mathbb{H}$ (in genere si parte dalla matrice identita), e via via, costruire la successione $\mathbf{H_i}$ in modo che ad ogni aggiornamento, risulti sempre simmetrica e definita positiva. Con tale accorgimento, se ci si trova lontano d un minimo, si ha garanzia di muoversi in una direzione di discesa, se invece si è vicini ad un minimo la matrice approssimante tende all'hessiana e garantisce la convergenza quadratica del metodo di Newton. Inoltre il passo di Newton è stato definito dalla 4.2.11 approssimando al secondo ordine la funzione. Se non si è abbastanza vicini al minimo, prendere l'intero passo $\boldsymbol{p}$, nonostante $\mathbb{H}$ sia definita positiva, potrebbe non essere sufficiente a garantire la decrescita della funzione: ci si potrebbe spostare troppo perché sia valida l'approssimazione quadratica. L'unica cosa valida sarebbe la direzione di decrescita. Per risolvere il problema, si adotta una strategia di " backtracking" per scegliere un passo di ampiezza minore, lungo la direzione di ricerca.

Quanto sin qui esposto, è riportato nelle procedure Matlab® denominate "*dfpminlqt* " e "*lnsrch_lqt*", riportate in appendice rispettivamente in appendice B2 e B3.

4.3 Risultati del metodo LQTOF: confronto con l'approccio classico

Il risultato del processo di ottimizzazione è la terna di guadagni riportati in tabella 4.5.
Nella stessa tabella sono riportati anche i guadagni di chiusura ricavati usando il metodo classico.
In tabella 4.6 invece, sono riportati i poli di corto periodo in ciclo chiuso. Dal confronto con quelli ottenuti tramite il metodo classico (tabella 4.3), si nota un corto periodo con smorzamento e pulsazione maggiore.

	K_q	K_α	K_i
Metodo LQTOF	0,37982	0,13095	-8,1454
Metodo classico	0,35	0,2	-6,5

Tabella 4.6 Confronto tra i guadagni determinati

Poli	Damping ζ	Freq. ω_n(rad/s)
-2,2667 + 1,5793i	0,8205	2,7626
-2,2667 - 1,5793i	0,8205	2,7626

Tabella 4.7 Corto periodo in ciclo chiuso coi guadagni determinati col metodo LQTOF

Nelle figure 4.19-4.26 sono confrontate le risposte nel tempo al gradino unitario dell'ingresso di riferimento, ottenute con le due metodologie seguite.
Come si nota, quelle ottenute chiudendo il sistema col metodo LQTOF, mostrano una sovraelongazione minore ed inoltre un tempo di assestamento minore.
L'andamento nel tempo della deflessione δ_e dell'equilibratore in entrambe i casi mostra una moderata azione del controllo, ossia non si notano vistose azioni di correzione.

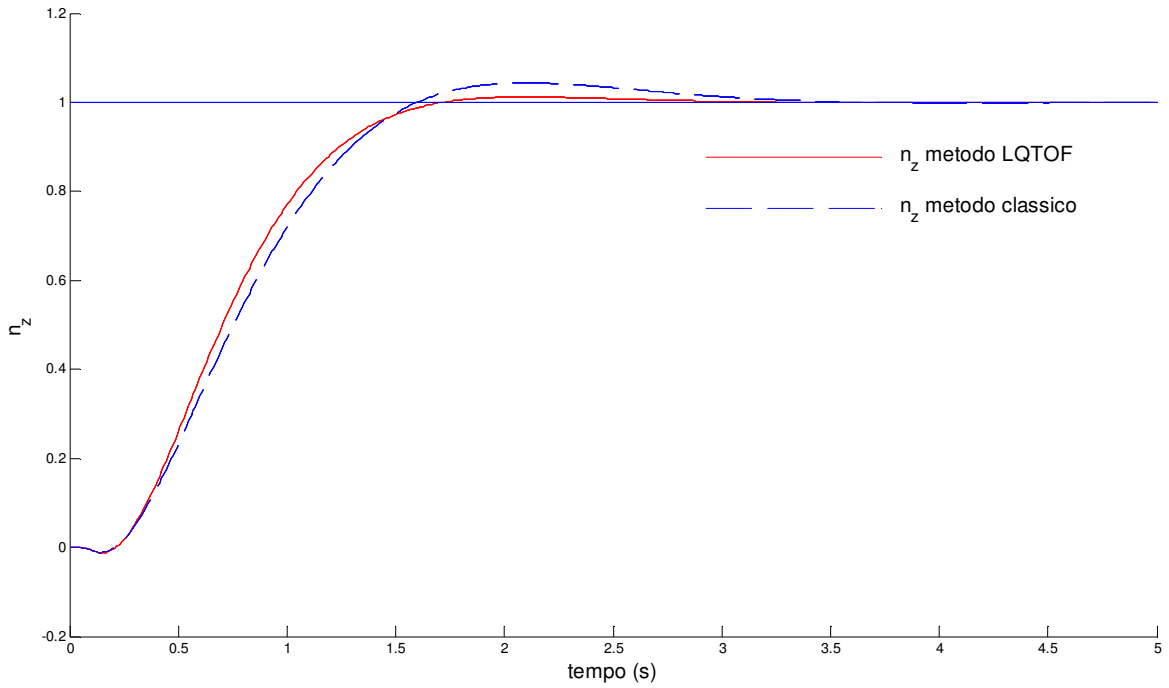


Figura 4.19 Risposta al gradino di $\frac{n_z}{\delta_{PIT\_STIK}}$: confronto tra metodo LQTOF e Classico

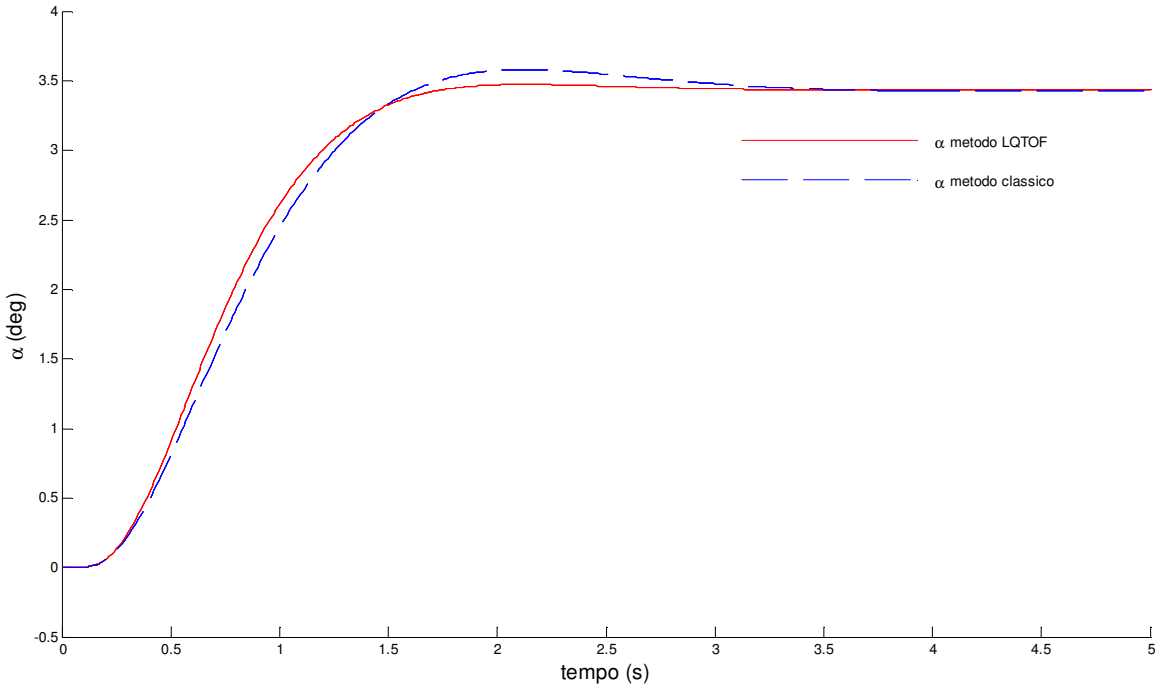


Figura 4.20 Risposta al gradino di $\frac{\alpha}{\delta_{PIT\_STIK}}$: confronto tra metodo LQTOF e Classico

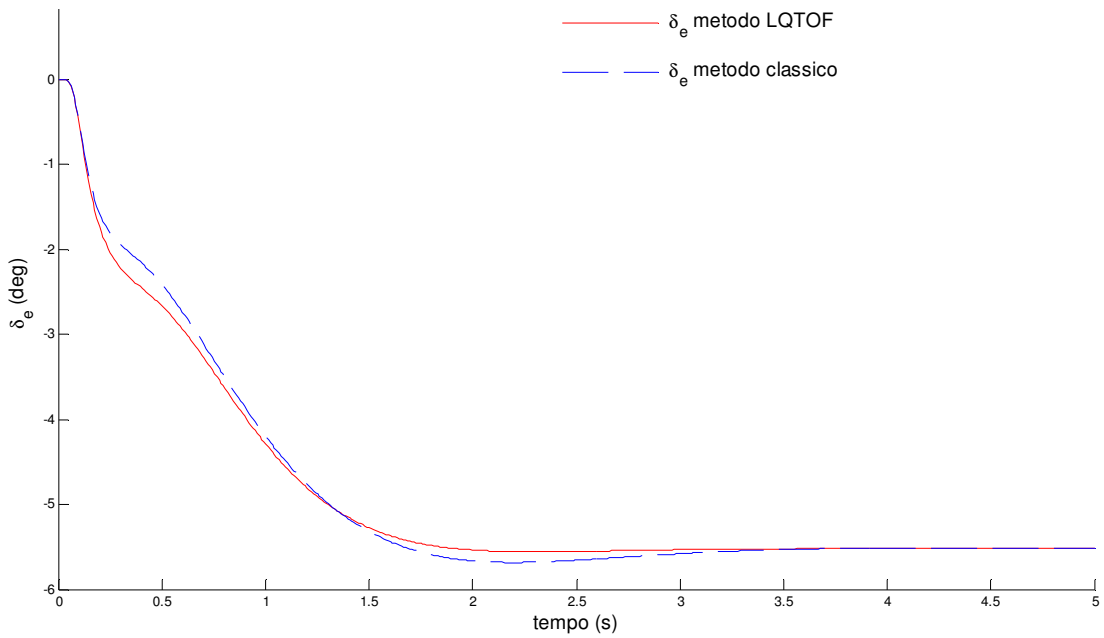


Figura 4.21 Risposta al gradino di $\frac{\delta_e}{\delta_{PIT\_STIK}}$: confronto tra metodo LQTOF e Classico

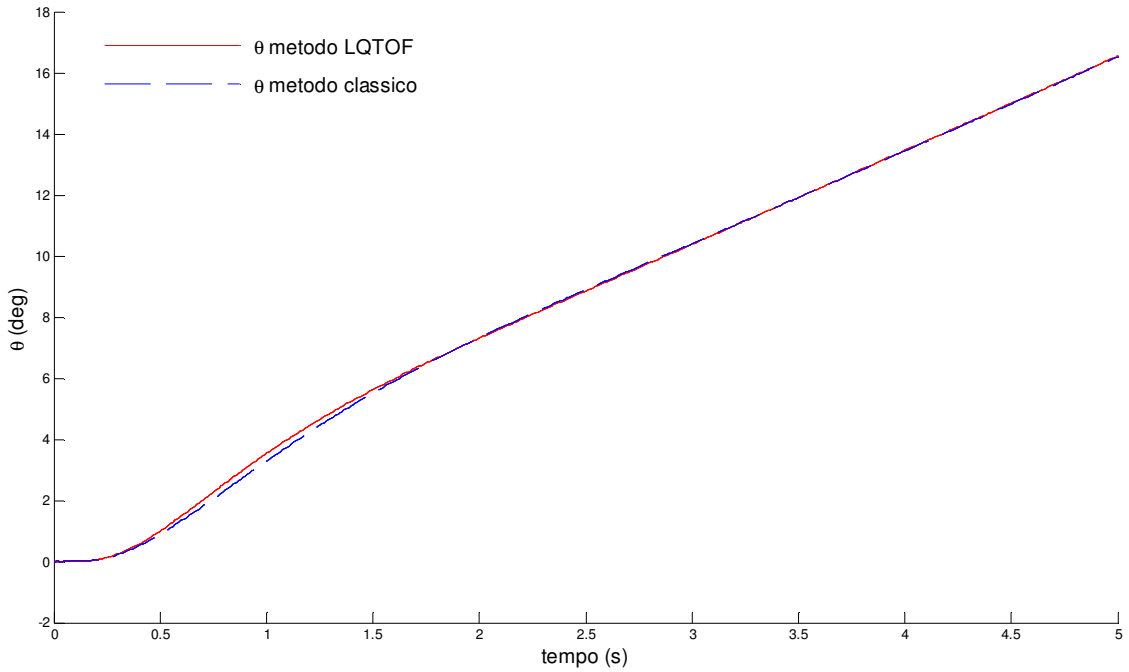


Figura 4.22 Risposta al gradino di $\frac{\theta}{\delta_{PIT\_STIK}}$: confronto tra metodo LQTOF e Classico

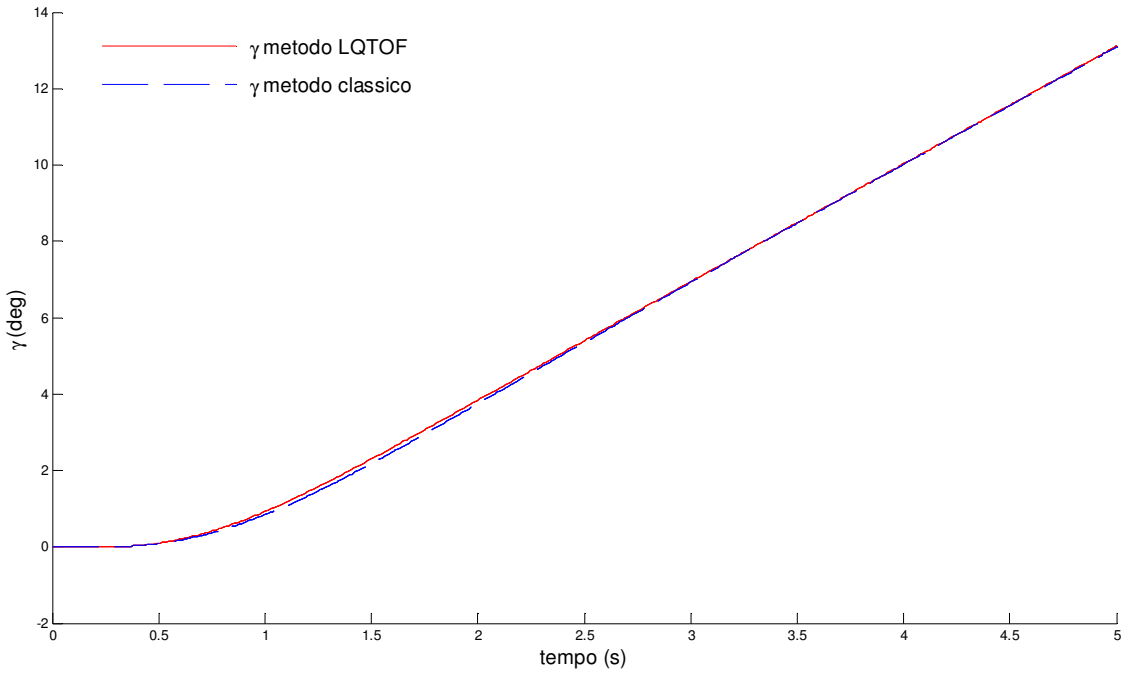


Figura 4.23 Risposta al gradino di $\frac{\gamma}{\delta_{PIT\_STIK}}$: confronto tra metodo LQTOF e Classico

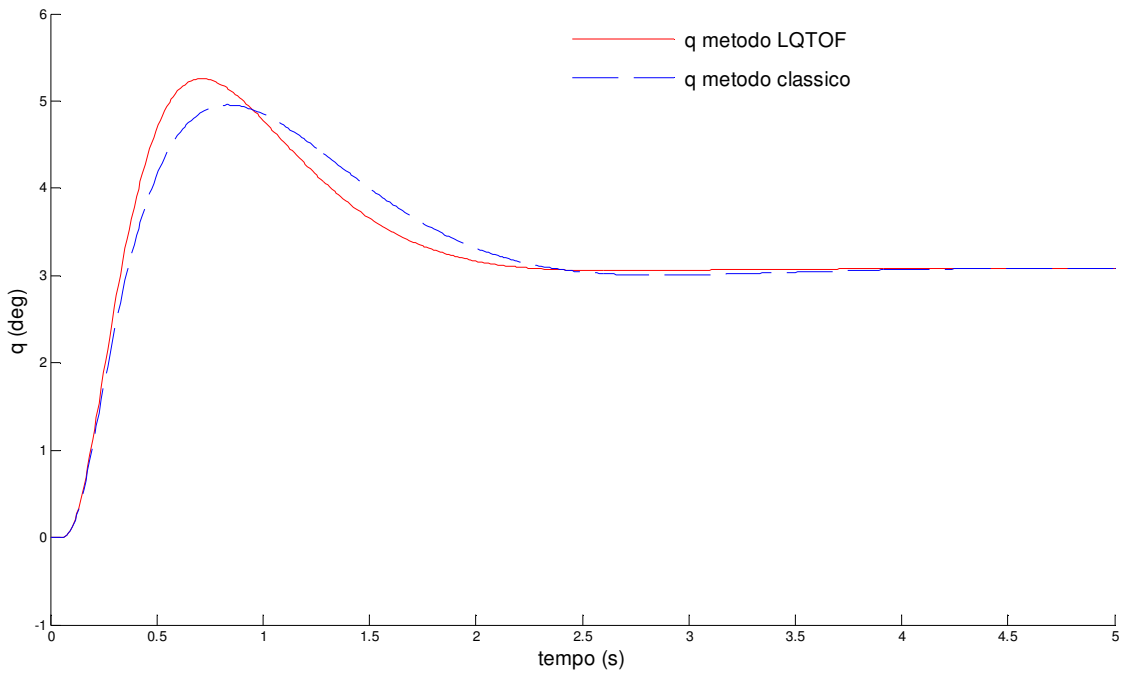


Figura 4.24 Risposta al gradino di $\frac{q}{\delta_{PIT\_STIK}}$: confronto tra metodo LQTOF e Classico

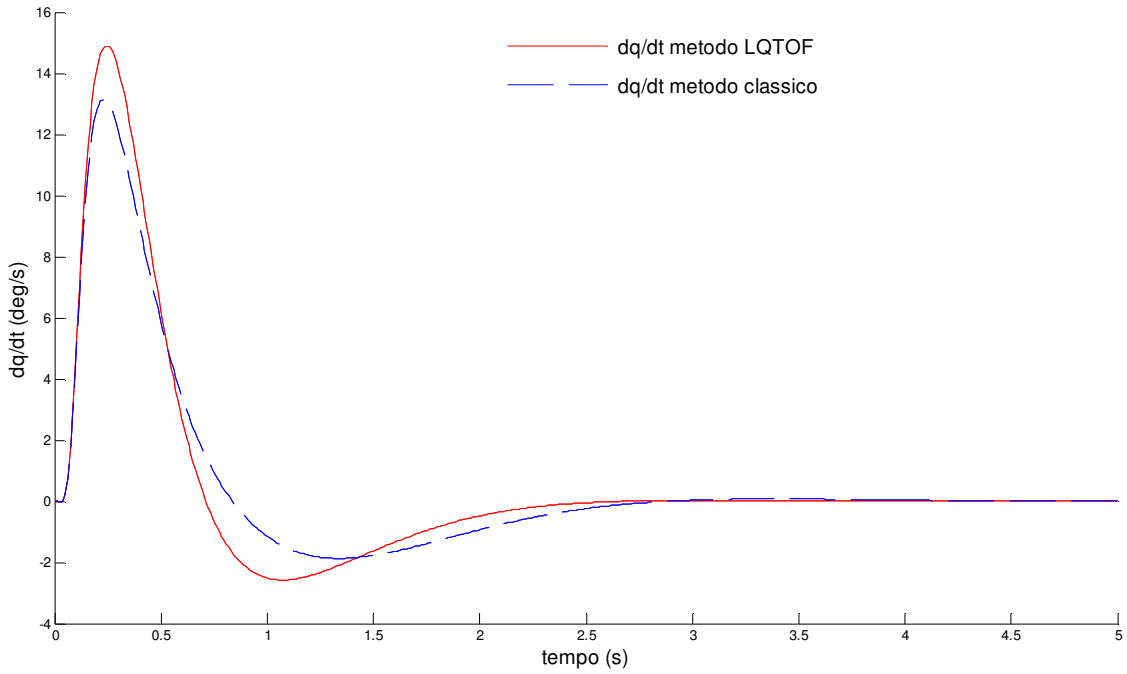


Figura 4.25 Risposta al gradino di $\frac{\dot{q}}{\delta_{PIT\_STIK}}$: confronto tra metodo LQTOF e Classico

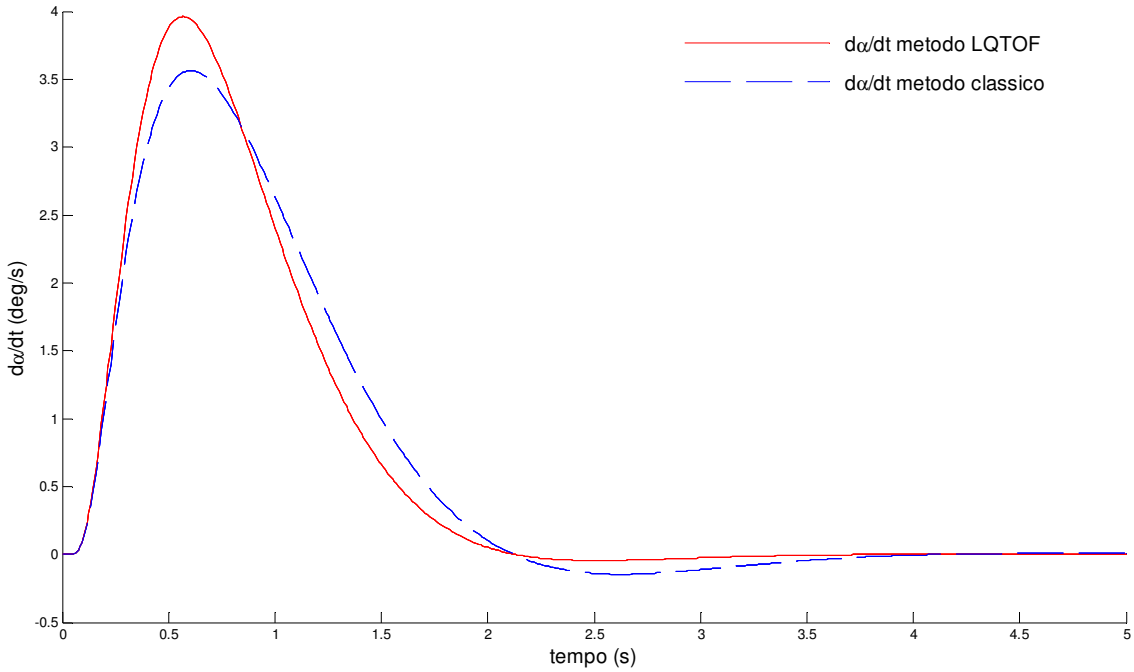


Figura 4.26 Risposta al gradino di $\frac{\dot{\alpha}}{\delta_{PIT\_STIK}}$: confronto tra metodo LQTOF e Classico

Capitolo 5

5. Soddisfacimento dei criteri di sintesi e scheduling dei guadagni

5.1 Effetto dei filtri lead-lag

Nel precedente capitolo è emerso come l'approccio LQTOF permetta di ottenere risultati paragonabili e, in certi casi migliori, rispetto alla sintesi effettuata con gli strumenti classici.
Come già evidenziato, il progetto del sistema di controllo è stata sin qui condotta trascurando la presenza nello schema 3.2 dei filtri "lead-lag". In questo capitolo invece, verranno ricollocati nel modello e ottimizzati, al fine di verificare i requisiti descritti nel paragrafo 3.3. A tale scopo è stata realizzata una procedura in Matlab per verificare che siano rispettati i criteri di Gibson con i vincoli imposti dalle specifiche per il velivolo P1xx.
L'ottimizzazione dei filtri è stata eseguita "per tentativi" modificando di volta in volta la posizione del polo e dello zero e valutando l'effetto prodotto sulle risposte del sistema.
Sul ramo di comando, nei casi esaminati, il filtro più adatto si è rilevato un filtro di anticipo, in modo da rendere le risposte più pronte e in particolar modo per rispettare il vincolo sul tempo al picco della risposta in $\dot{q}$ fissato in $0.18\ s$ (tabella 3.12). Il filtro sul ramo del pitch damper si è rivelato utile per modellare sovraelongazione e tempo di assestamento.
Per come sono stati scelti i pesi per l'ottimizzazione LQTOF, i guadagni K_i, K_q e K_α ottenuti, in assenza dei suddetti filtri, hanno comunque fornito risposte in grado di soddisfare i criteri di Gibson e andare a regime in tempi non superiori a $3\ s$.
Sono stati inoltre rispettati i limiti per il CAP (Control Anticipation Parameter) riportati in tabella 3.12.
Per l'ottimizzazione delle risposte tramite i filtri, si è intervenuto prima sul filtro posto sul ramo di comando. Ciò perché il ramo feedforward rappresenta un comando diretto all'attuatore, quindi interviene sulla dinamica nei primi istanti. Successivamente è stato trattato il filtro sul ramo del pitch damper in modo da migliorare la forma della risposta.

In tabella 5.1 sono riportati i filtri presenti sul ramo feedforward (H_{ff}) e quello sul ramo del pitch damper (H_{fb}):

	H_{ff}	H_{fb}
M=0,45	$\frac{0.21s+1}{0.055s+1}$	$\frac{0.7s+1}{0.65s+1}$
M=0,6	$\frac{0.2s+1}{0.058s+1}$	$\frac{0.79s+1}{0.88s+1}$
M=0,84	$\frac{0.15s+1}{0.06s+1}$	$\frac{0.56s+1}{0.7s+1}$

Tabella 5.1 Filtri sui rami feedforward e sulla retroazione in q

Nelle figure 5.1-5.7 è riportato l'effetto dei filtri ottimizzati per la condizione di volo definita da M=0,6.

Si vede come il loro contributo migliora i tempi di risposta e di assestamento. In figura 5.2 si vede l'effetto di anticipo successivamente correzione del comando di equilibratore.

In figura 5.8 invece è riportato il diagramma di Bode da cui emergono un margine di guadagno di 11,1dB (a 6.9 rad/sec) e un margine di fase Pm=180 deg. Il sistema mostra quindi un ampio margini di stabilità.

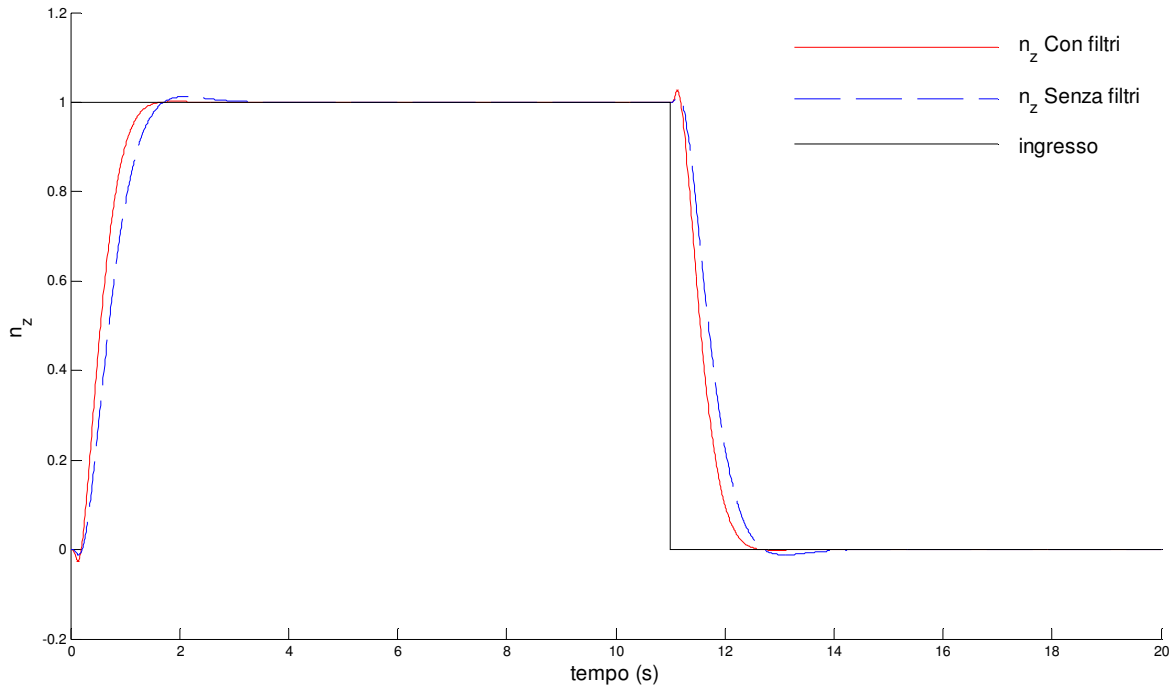


Figura 5.1 Risposta al gradino di $\frac{n_z}{\delta_{PIT\_STIK}}$: effetto dei filtri *lead-lag*

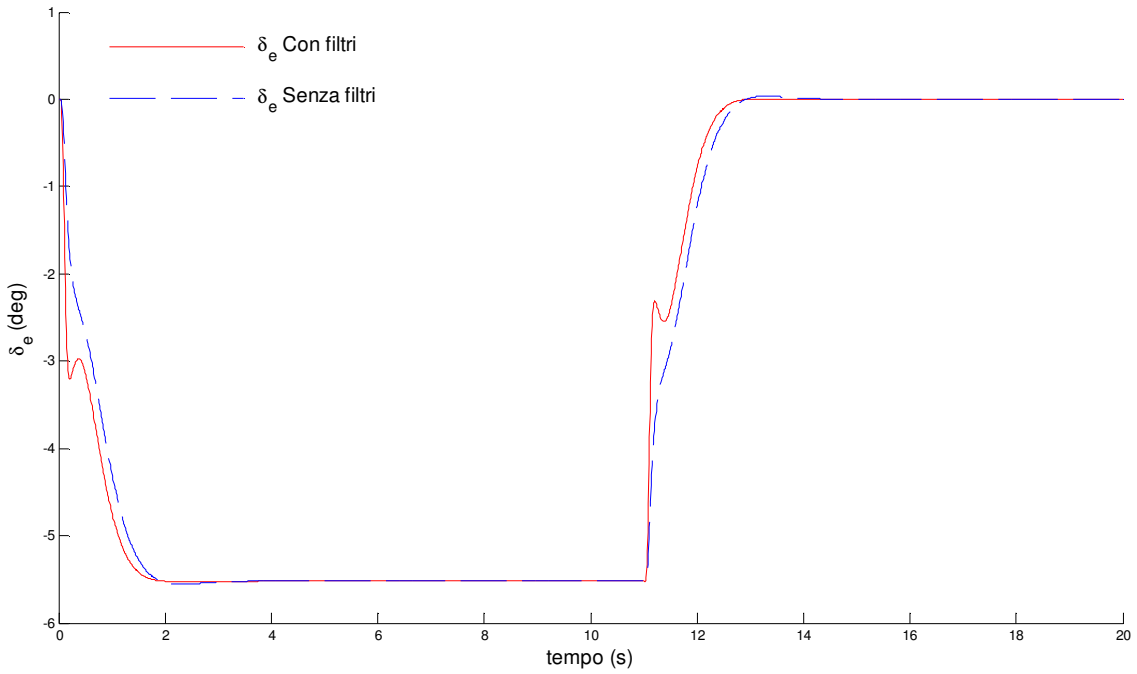


Figura 5.2 Risposta al gradino di $\frac{\delta_e}{\delta_{PIT\_STIK}}$: effetto dei filtri *lead-lag*

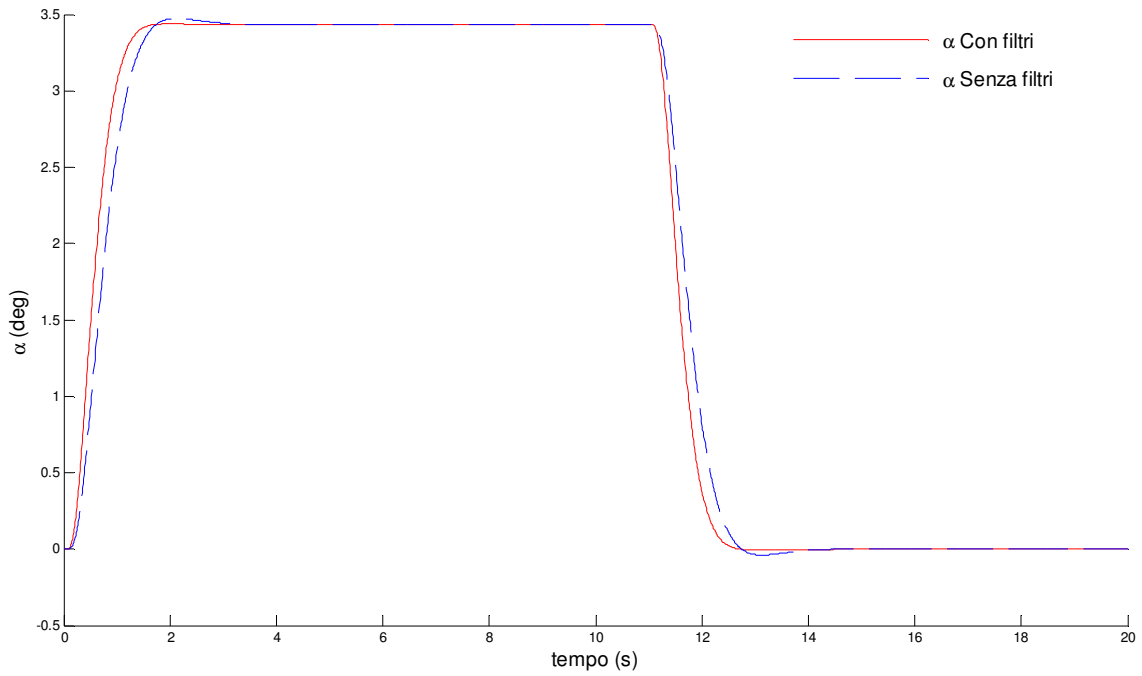


Figura . Risposta al gradino di $\frac{\alpha}{\delta_{PIT\_STIK}}$: effetto dei filtri *lead-lag*

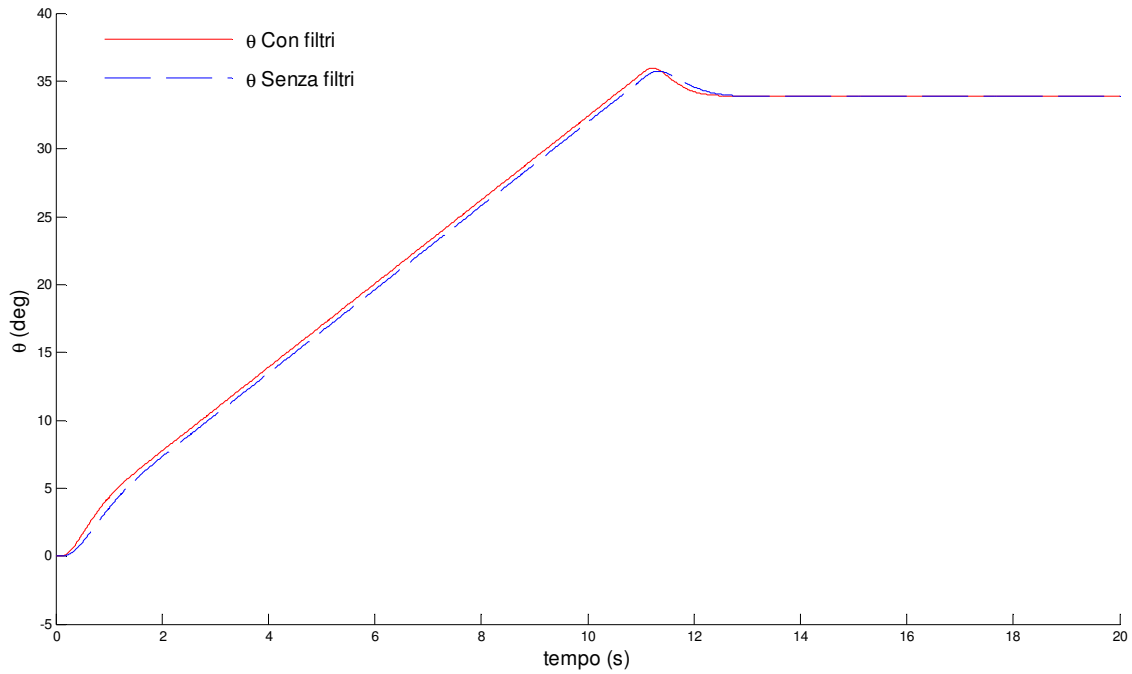


Figura 5.3 Risposta al gradino di $\frac{\theta}{\delta_{PIT\_STIK}}$: effetto dei filtri *lead-lag*

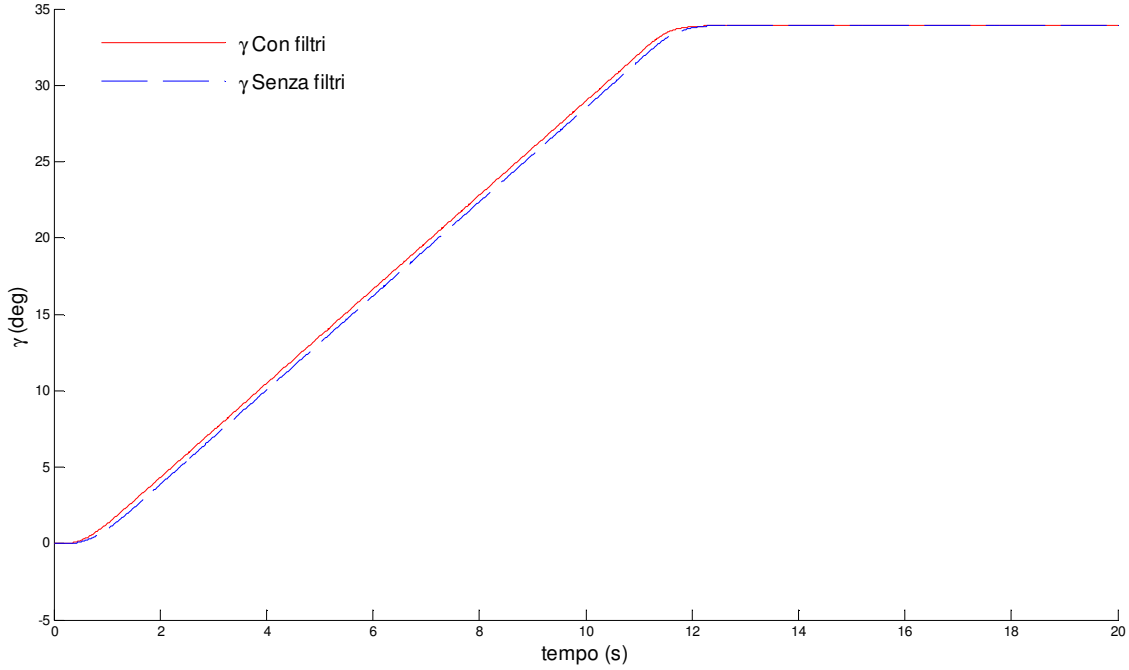


Figura 5.4 Risposta al gradino di $\frac{\gamma}{\delta_{PIT\_STIK}}$: effetto dei filtri *lead-lag*

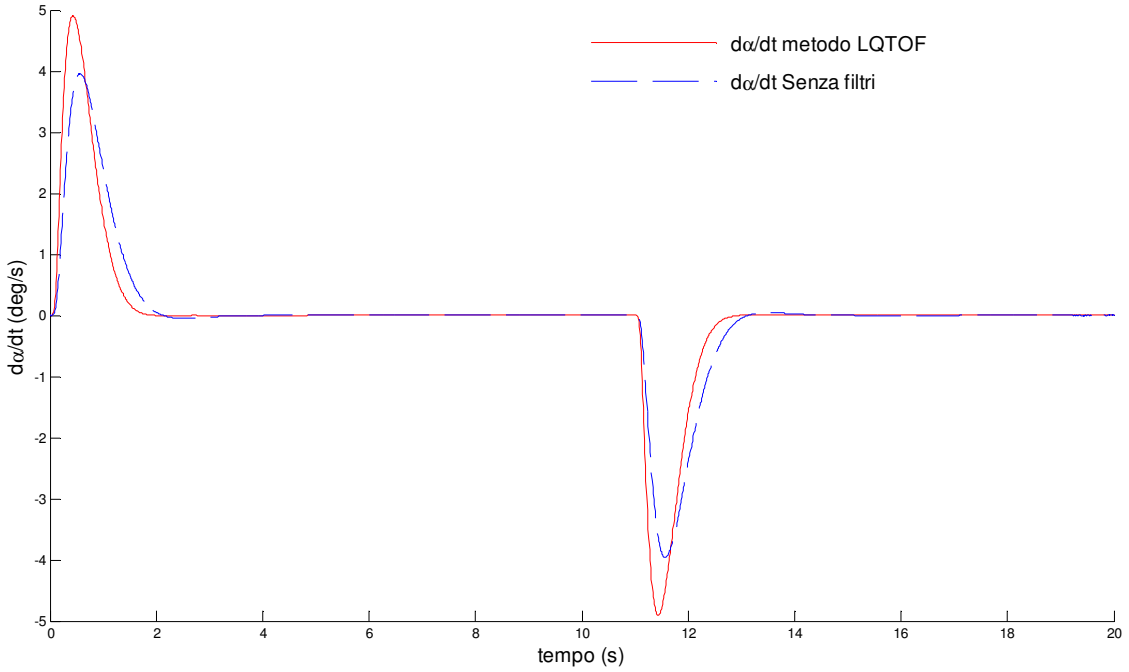


Figura 5.5 Risposta al gradino di $\frac{\dot{\alpha}}{\delta_{PIT\_STIK}}$: effetto dei filtri *lead-lag*

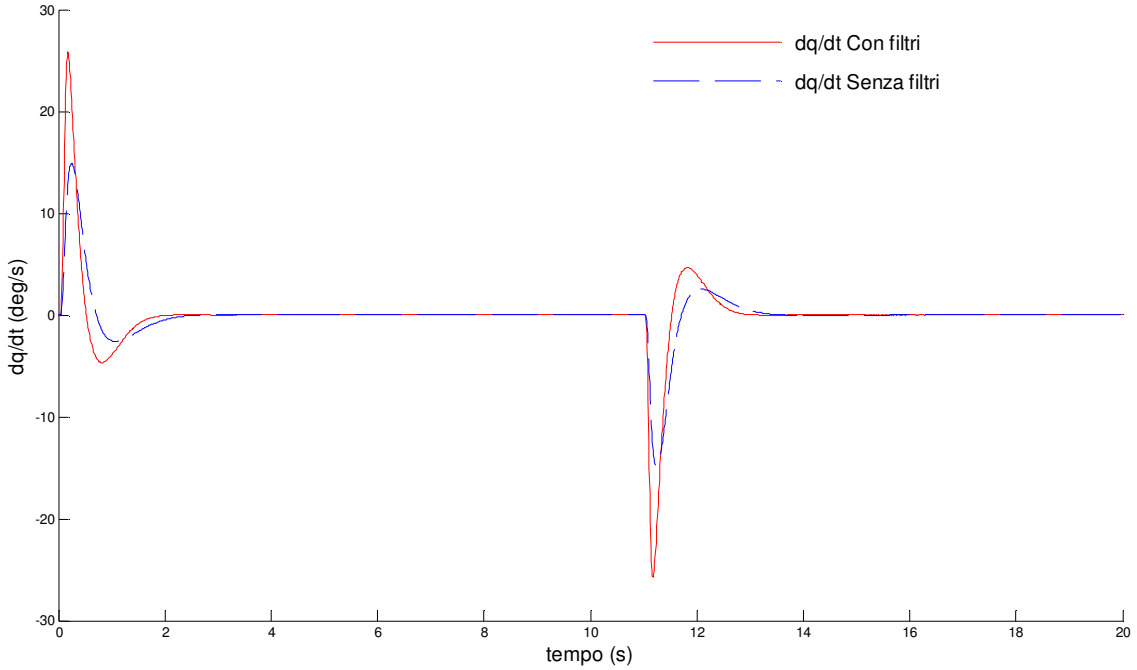


Figura 5.6 Risposta al gradino di $\frac{\dot{q}}{\delta_{PIT\_STIK}}$: effetto dei filtri *lead-lag*

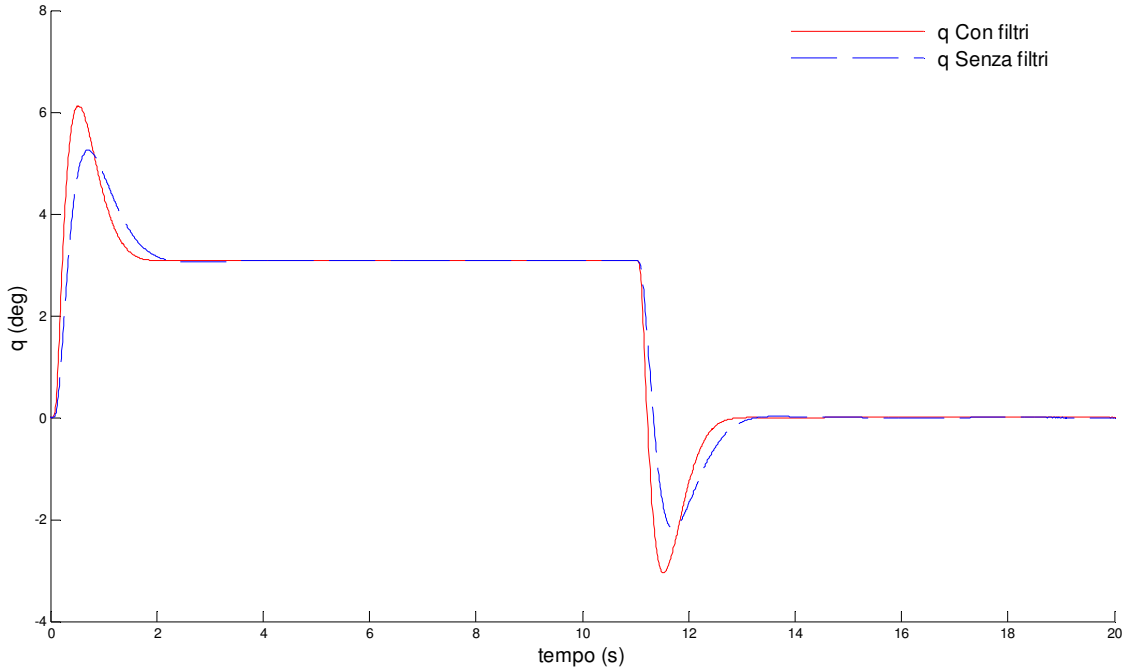


Figura 5.7 al gradino di $\frac{q}{\delta_{PIT\_STIK}}$: effetto dei filtri *lead-lag*

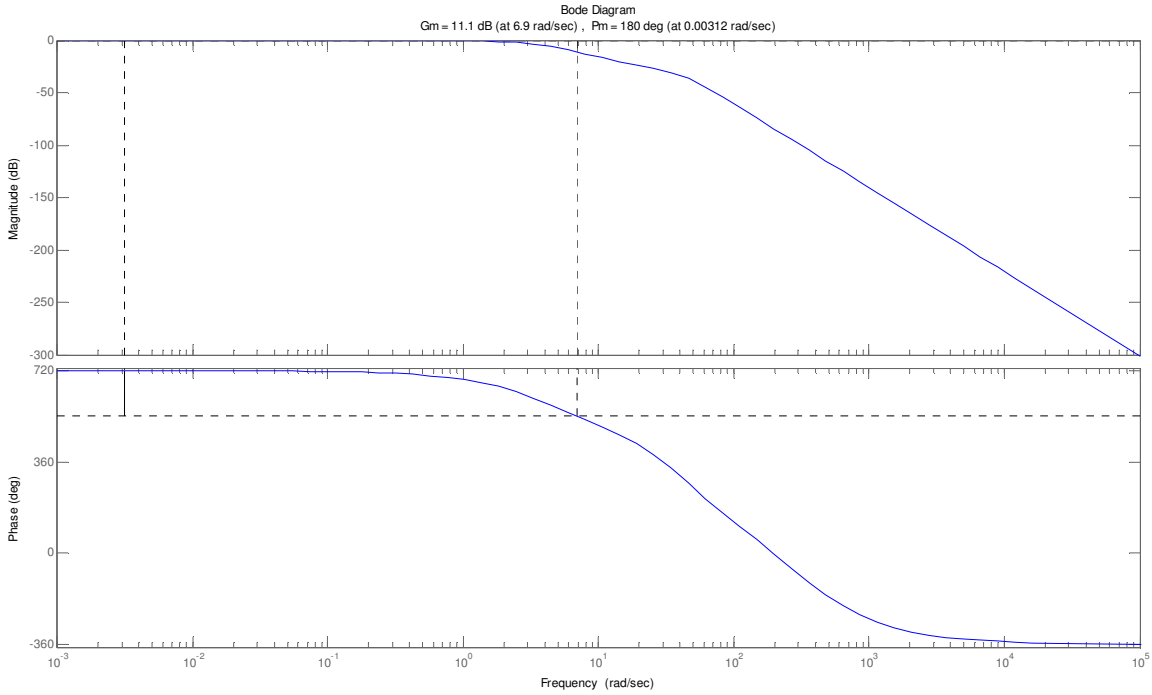


Figura 5.8 Diagramma di Bode per la f.d.t $n_z/\delta_{pitstik}$. Sistema chiuso col metodo LQTOF..

5.2 Verifica delle prestazioni

La sintesi del sistema di controllo è stata condotta per tre condizioni di volo, tutte alla stessa quota, h=29.300 ft, al variare del numero di Mach (M=0.45, M=0.6 e M=0.84). Disponendo di tre set di matrici di stato per la dinamica del velivolo, è stata realizzata una rutine che, dato in ingresso il numero di mach, restituisce le matrici di chiusura ottimizzate.
La procedura per la simulazione e, successivamente, verifica dei risultati si avvale di una serie di "*sub-rutine*" realizzate allo scopo di rendere agevole e rapide le fasi di:

1. **Preparazione del modello**: si imposta il Mach di volo nel file "lonpiaggio.m" (app. B6)
2. **Ottimizzazione dei guadagni di chiusura**: si lancia il file "track.m"
3. **Simulazione in ambiente Simulink:** si lancia il modello simulink "CAS"
4. **Analisi delle risposte:** si esegue lo sript "requisiti.m" (app. E1)

Tramite questi quattro passaggi eseguibili in tempo estremamente rapido, si è in grado di analizzare le prestazioni del sistema.

In tabella 5.2 sono riportati i valori dei guadagni di chiusura per le tre condizioni di volo disponibili.

Di seguito si riportano in grafico i risultati ottenuti per la condizione di volo a M=0.6 (figure 5.9-5.12).

I filtri usati per le tre condizioni di volo sono quelli indicati in precedenza in tabella 5.1.

In tabella 5.2 e 5.3 sono riportati rispettivamente i guadagni di chiusura e i risultati delle verifiche eseguite secondo i criteri esposti nel capitolo 3.

	$\boldsymbol{K_q}$	$\boldsymbol{K_\alpha}$	$\boldsymbol{K_i}$	$\boldsymbol{K_{fwd}}$
$M = 0.45$	0.56876	0.49521	14.311	-1.6178
$M = 0.6$	0,37982	0,13095	8,1454	-0.91
$M = 0.84$	0,21286	-0,13466	3,871	-0.46429

Tabella 5.2 Guadagni di chiusura ottenuti col metodo LQTOF per tre condizioni di volo

	$Qmax/_{Qss}$	$t_{q_{max}}$ [s]	$\dot{Q}_{max}$ $[\frac{deg/s^2}{g}]$	$t_{\dot{Q}_{max}}$ [s]	$\vartheta_{DB}/_{Q}$ [s]	t_γ [s]
$M = 0.45$	1,9779	0,71187	26,969	0,17283	0,78434	0,81542
$M = 0.6$	1,9884	0,5327	25,795	0,17257	0,5112	0,60353
$M = 0.84$	1,9315	0,5084	21,894	0,17315	0,22746	0,40005

Tabella 5.3 Risultati delle verifiche

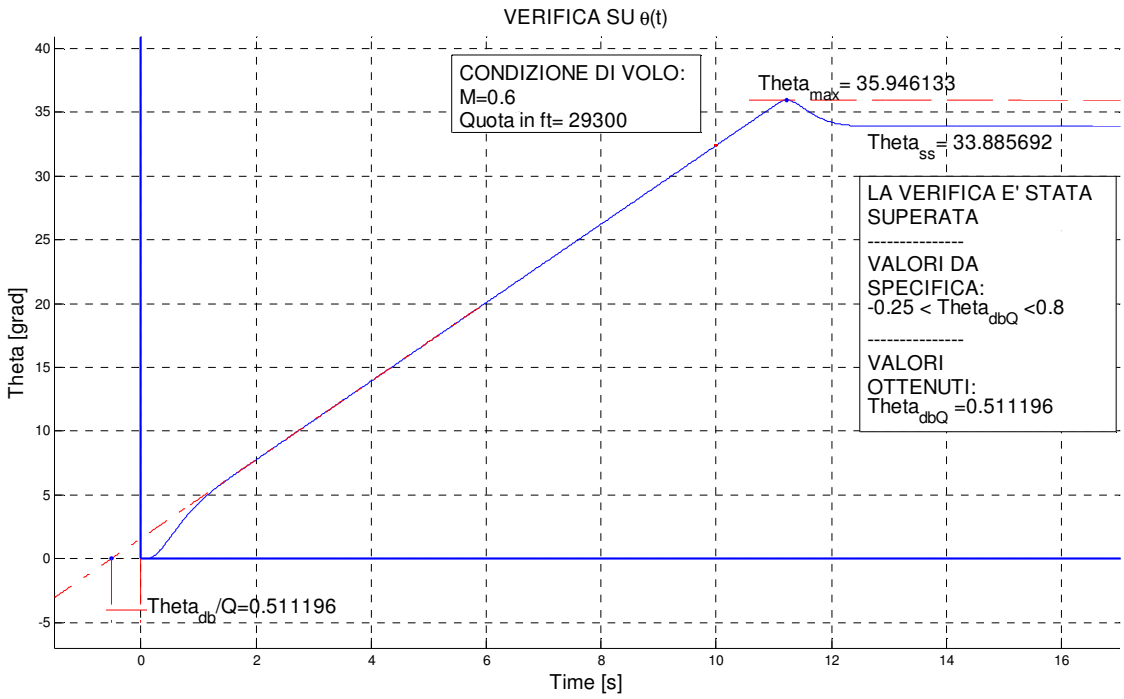


Figura 5.9 Drop bak test per la condizione di volo M=0.6

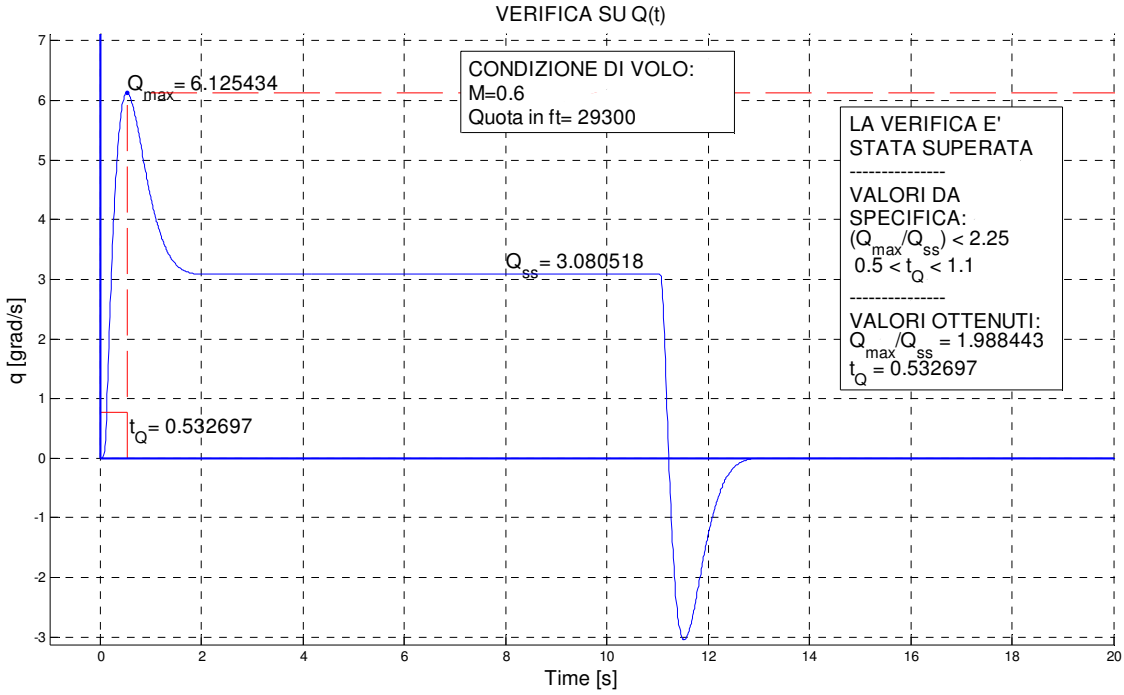


Figura 5.10 Pitch rate overshoot Q_{max}/Q_{SS} per la condizione di volo M=0.6

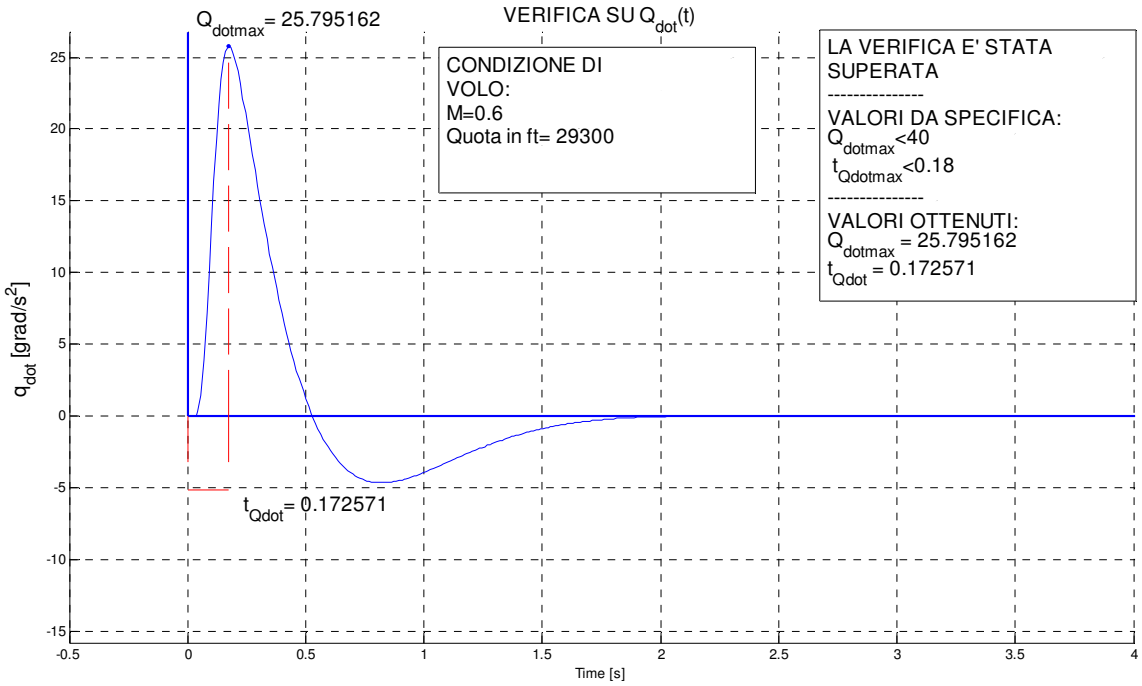


Figura 5.11 Control Anticipation Param $\dot{Q}/$ g per la condizione di volo M=0.6

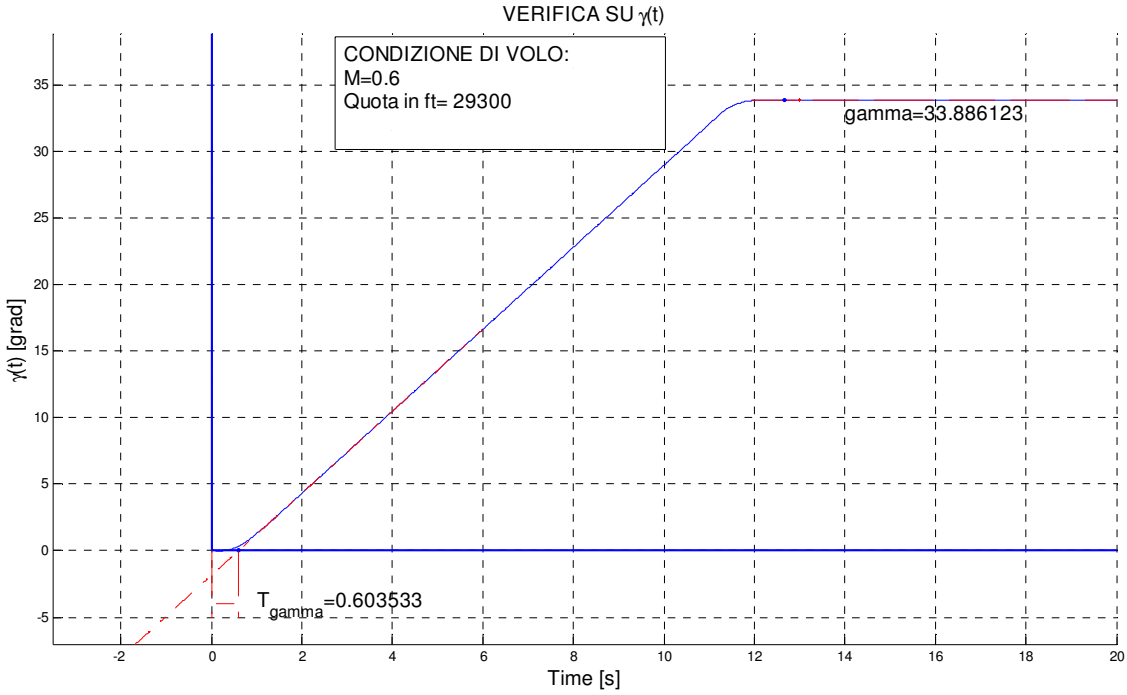


Figura 5.12 Fly Path Time Delay Criterion per la condizione di volo M=0.6

5.3 Scheduling dei guadagni e considerazioni sulla robustezza del sistema

Emergono a questo punto i vantaggi del metodo di sintesi descritto nel 4 capitolo. Ossia la possibilità di definire una procedura automatizzabile, che permetta di determinare, simultaneamente, tutti i guadagni necessari al controllo in ciclo chiuso del sistema.

Come già evidenziato, ciò consente al progettista di risparmiare una notevole quantità di tempo e limita l'accumulo di errori dovuti alla chiusura consecutiva dei vari anelli di retroazione. In più, nella fase di scheduling dei guadagni, non è necessario ripetere per ogni punto dell'inviluppo di volo, analisi complesse e laboriose come quelle in frequenza.

Seguendo i passi descritti precedentemente, è stata condotta la sintesi del sistema di controllo per condizioni di volo definite da M=0.45 e M=0.84. Dalle verifiche sono emersi risultati soddisfacenti.

Nella procedura di ottimizzazione, ogni volta che si cambia la condizione di volo, è necessario inizializzare l'algoritmo di calcolo con un set di guadagni di partenza. La strategia usata è stata quella di inizializzare con i guadagni di ottimo della condizione di volo più vicina.

Noti a tal punto i set di guadagni per le tre condizioni di volo, è stato eseguito un esempio di scheduling dei guadagni al variare del numero di Mach tra: M=0.45 e M=0.84 (app. E2).

I guadagni ottenuti sono stati riportati in grafico, in funzione della pressione dinamica.

Una buona approssimazione del loro andamento è rappresentata da polinomi di secondo grado ottenuto in Matlab® mediante il comando "polifit". Il risultato è riportato nelle figure 5.12 e 5.113.

Riportando invece l'andamento dei guadagni col reciproco della pressione dinamica, si ottiene un andamento pressoché lineare come mostrato nelle figure 5.15.

Questo tipo di andamento dei guadagni, molto regolare al variare della pressione dinamica, è un aspetto particolarmente vantaggioso per lo scheduling.

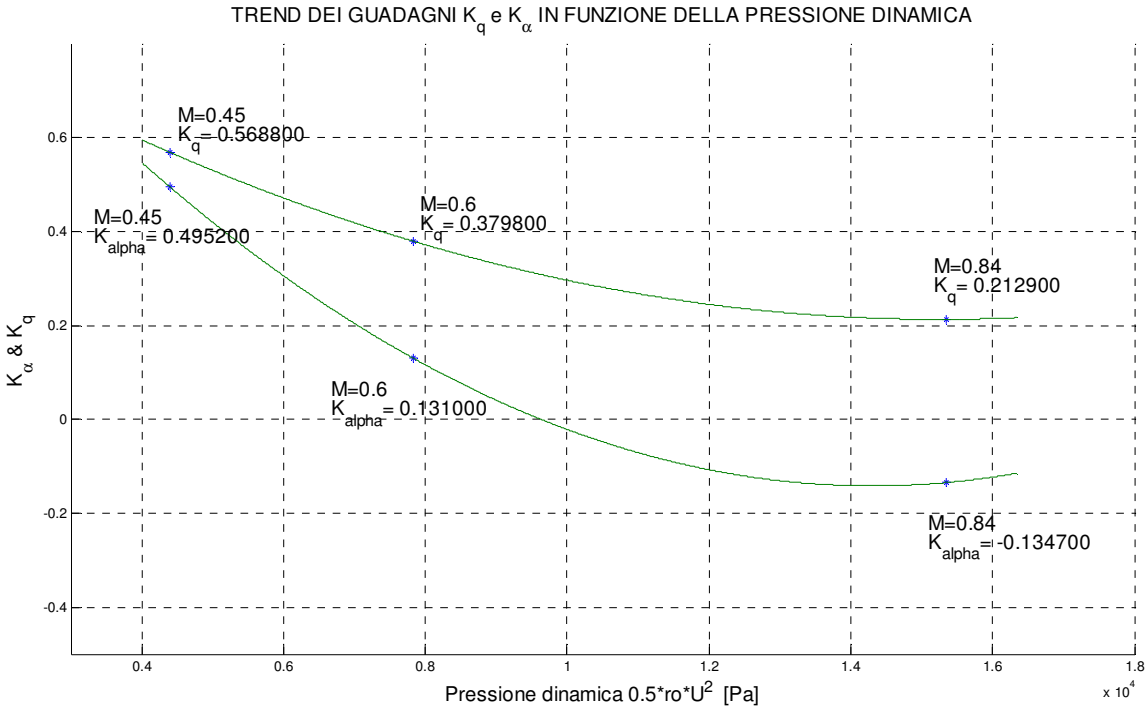


Figura 5.13 Andamento dei guadagni K_qe K_α al variare della pressione dinamica

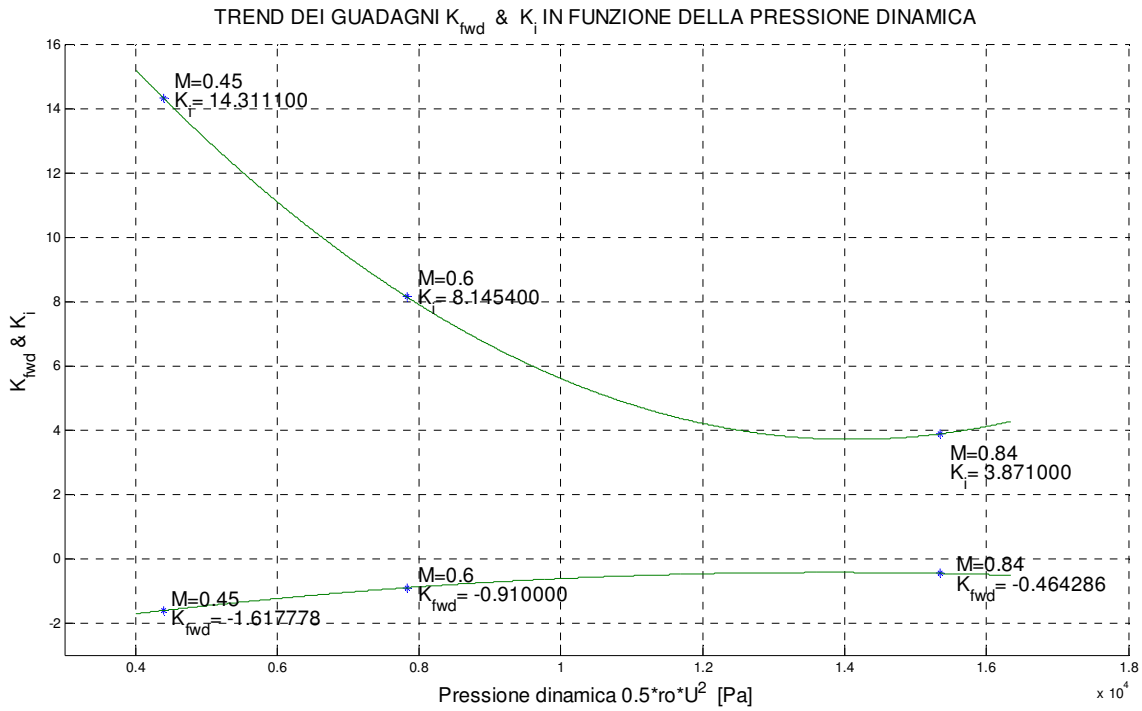


Figura 5.14 Andamento dei guadagni K_ie K_{fwd} al variare della pressione dinamica

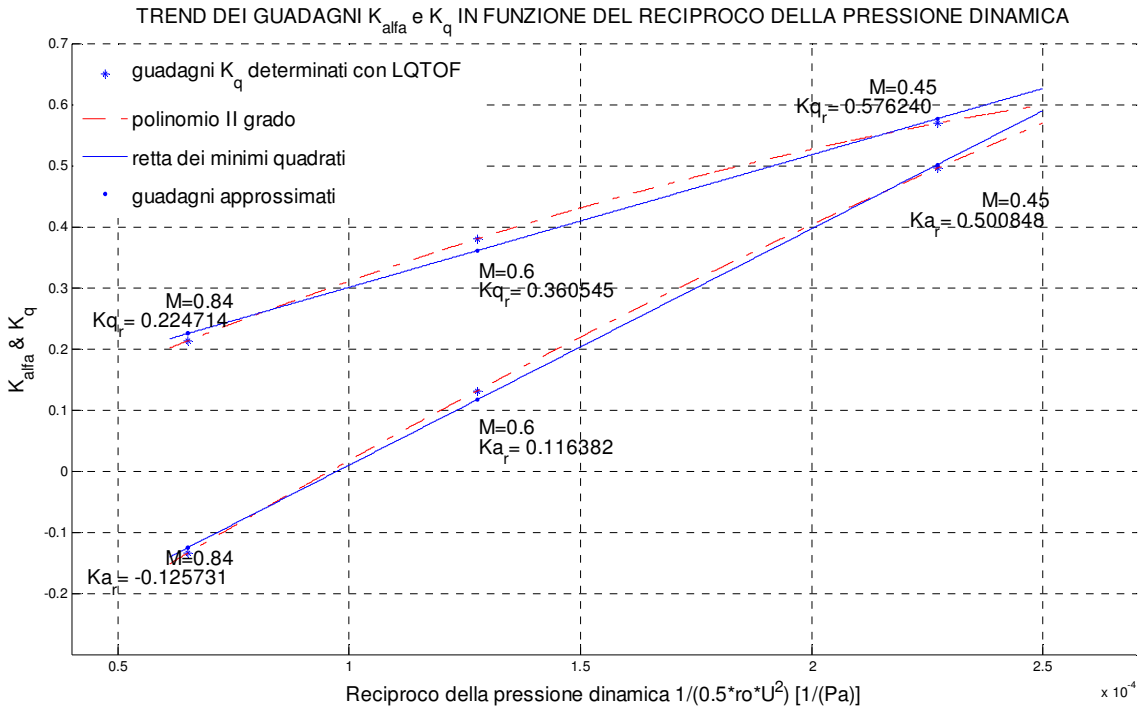


Figura 5.15 Andamento dei guadagni K_αe K_q al variare del reciproco della pressione dinamica

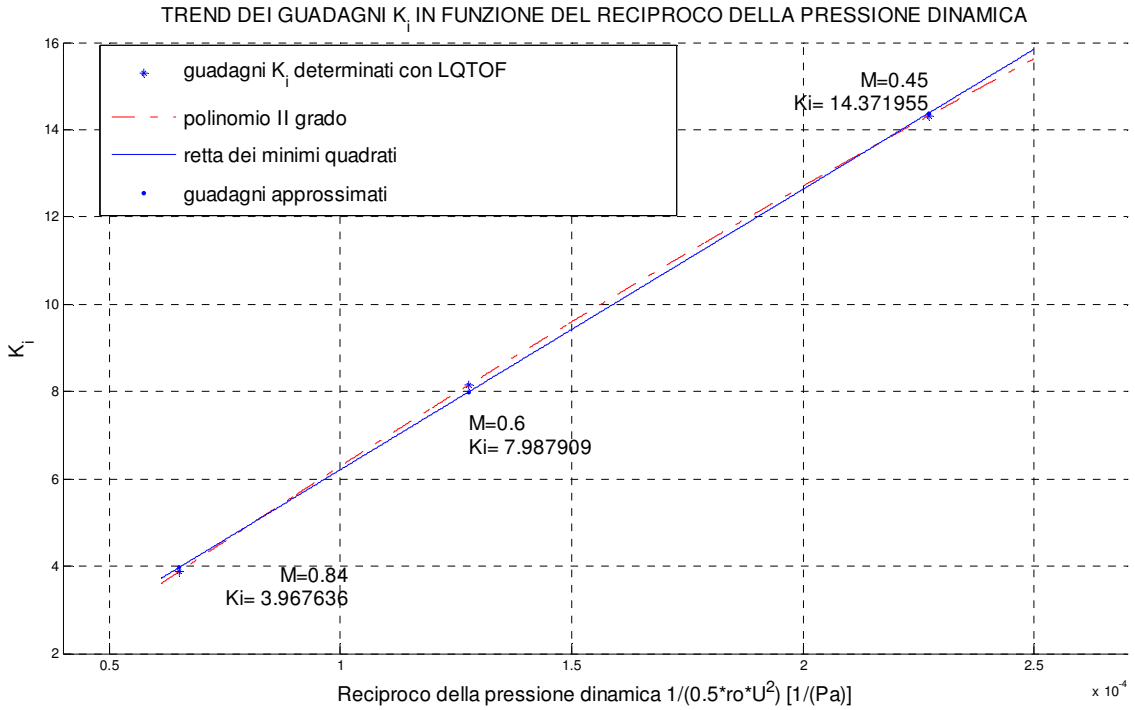


Figura 5.16 Andamento dei guadagni K_i al variare del reciproco della pressione dinamica

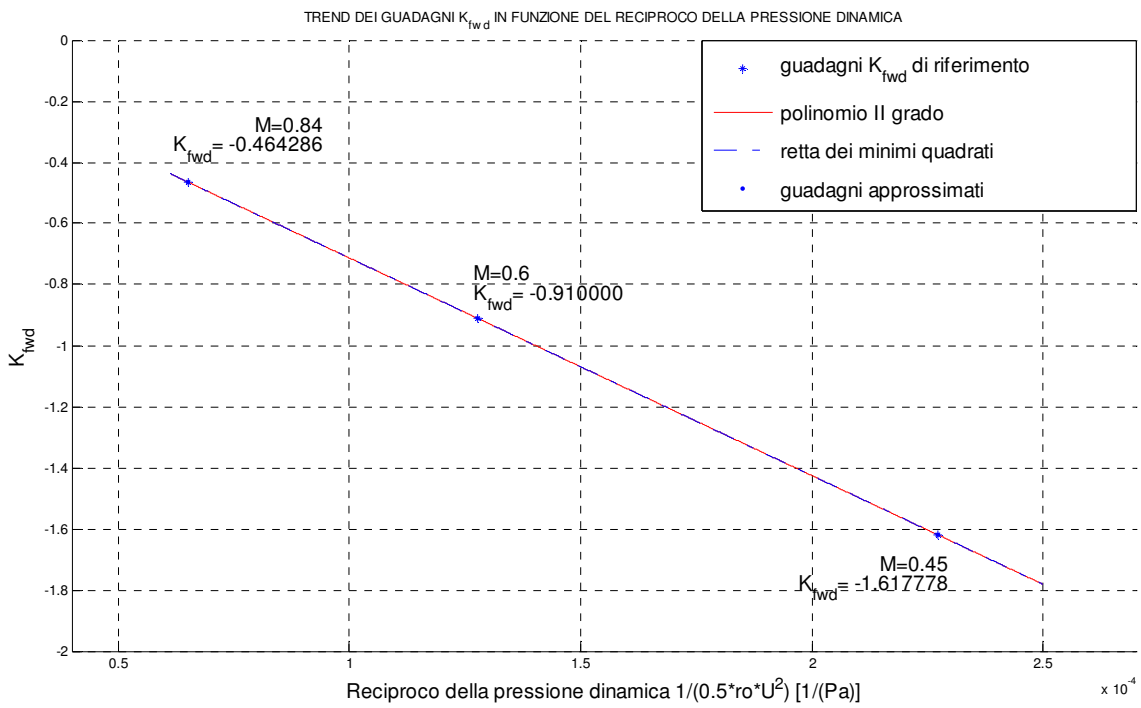


Figura 5.17 Andamento dei guadagni K_{fwd} al variare del reciproco della pressione dinamica

Una volta eseguito lo scheduling si è ritenuto opportuno verificare che eventuali disturbi sul dato di pressione non pregiudichino le prestazioni del sistema. Si potrebbe verificare che in presenza di disturbi le leggi di scheduling forniscano guadagni appartenenti ad un intorno di quelli ottimali. In pratica, ogni valore di M è associato un set di guadagni. Un errore di interpretazione del Mach produrrebbe di conseguenza, un errore sull'acquisizione del set di guadagni:

$$(M, K) \Rightarrow (M + \Delta M, K + \Delta \mathrm{K})$$

Per verificare il comportamento del sistema in tale situazione, è stato ipotizzato un errore massimo di 0.5kPa sulla pressione dinamica acquisita dalle sonde e sono stati usati i guadagni corrispondenti per chiudere il sistema.

È stata realizzata una funzione in Matlab® ("erpres.m" riportata in appendice E3) che, dati in ingresso il Mach di riferimento e l'errore percentuale sulla pressione dinamica, restituisce il set di guadagni $K + \Delta$K. e il numero di Mach $M + \Delta M$.

Considerando ad esempio una condizione di riferimento pari a M=0.45 ed un errore del 100% (cioè 0.5kPa), i guadagni assunti dal sistema di controllo sono quelli riportati in figura 5.18 e 5.19.

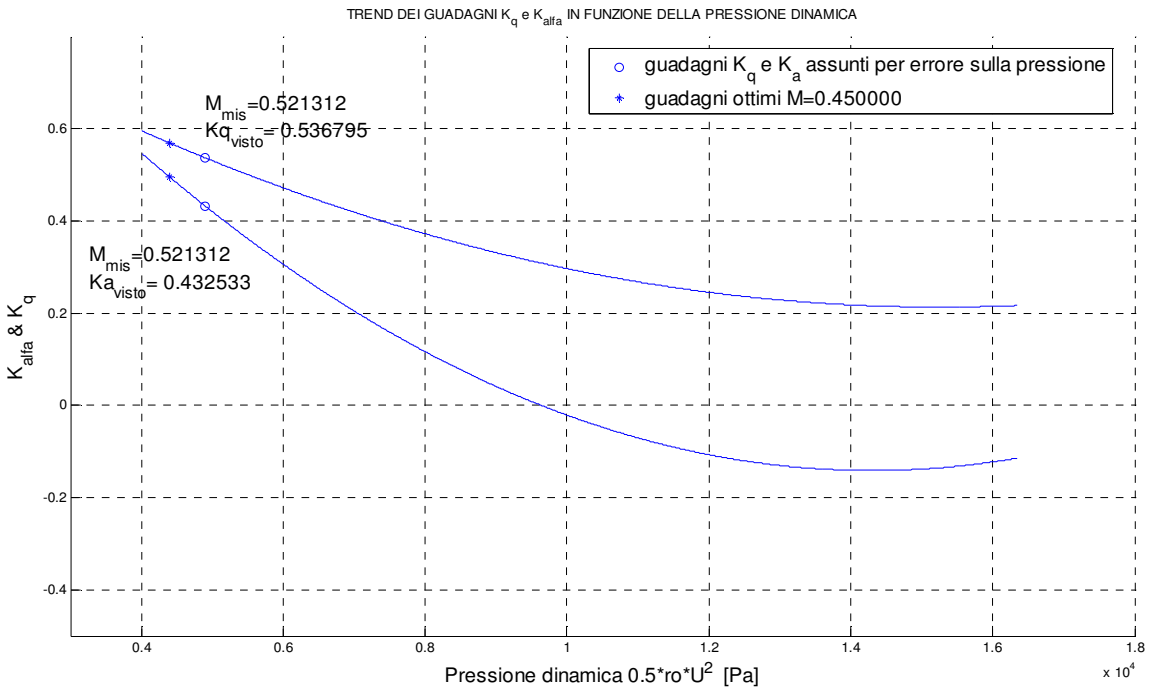


Figura 5.18 Scelta dei guadagni K_qe K_α in presenza di un errore di misura della pressione dinamica

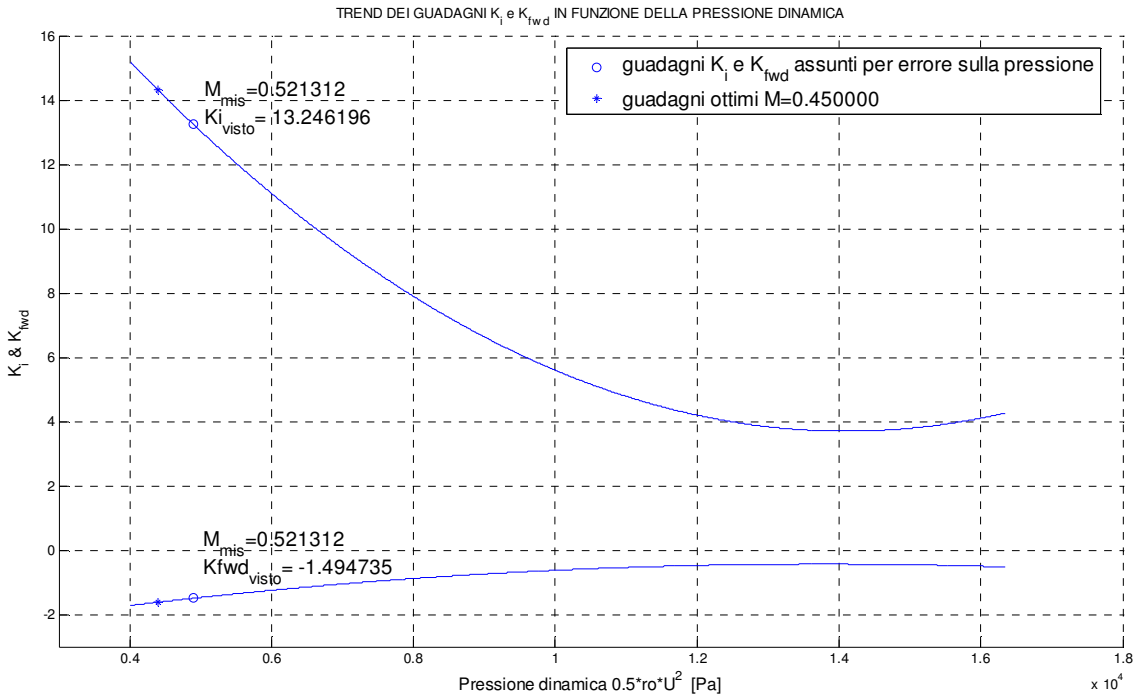


Figura 5.19 Scelta dei guadagni K_ie K_{fwd} in presenza di un errore di misura della pressione dinamica

In tabella 5.4 sono stati riportati i guadagni di ottimo, corrispondenti al $M = 0{,}45$ e quelli affetti da errore, corrispondenti a $M = 0{,}52$.

Come si vede dalla tabella 5.5, il corto periodo risulta ancora ben smorzato. In figura 5.20 è riportato il diagramma di Bode per la funzione di trasferimento $n_z/\delta_{pitstik}$ per il sistema nella condizione di volo definita da $M = 0{,}45$,ma chiuso con i guadagni schedulati per $M = 0{,}52$. Dal diagramma emerge un margine di guadagno di 14,4dB (a 5.73 rad/sec) e un margine di fase Pm=180 deg.

	$\boldsymbol{K_q}$	$\boldsymbol{K_\alpha}$	$\boldsymbol{K_i}$	$\boldsymbol{K_{fwd}}$
$\boldsymbol{M = 0,45}$	0,5688	0,4952	14,311	-1,6178
$M = 0{,}52$	0,5368	0,43253	13,246	-1,4947

Tabella 5.4 Condizione di volo M=0.45. Guadagni affetti da errore

Poli	Damping ζ	Freq. ω_n(rad/s)
-2,0485 + 1,7988i	0,75142	2,7261
-2,0485 - 1,7988i	0,75142	2,7261

Tabella 5.5 Condizione di volo M=0.45. Corto periodo in ciclo chiuso determinato con guadagni affetti da errore

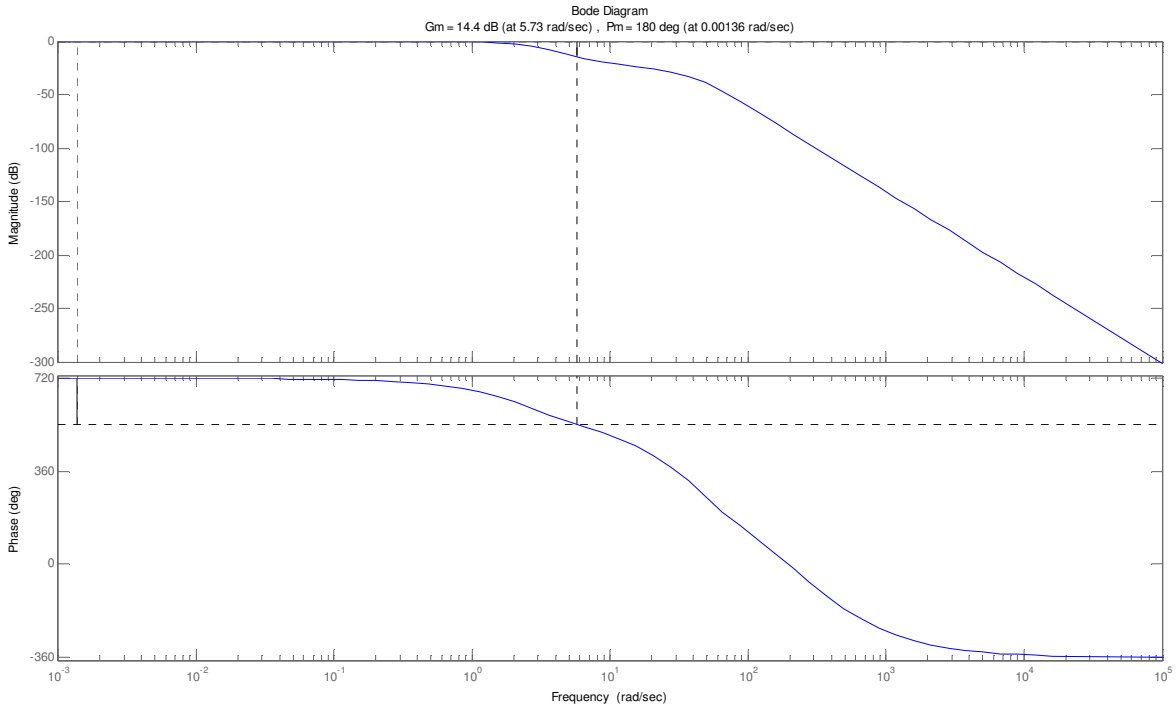


Figura 5.20 Diagramma di Bode per la funzione di trasferimento $n_z/\delta_{pitstik}$ per la condizione di volo chiusa con guadagni affetti da errore

Nelle tabelle 5.6 sono riportati i guadagni ottenuti considerando un errore del 100% sulla pressione dinamica, nell'intorno delle condizioni di volo corrispondenti a $M = 0{,}45$, $M = 0{,}6$ e $M = 0.84$ ed alla quota di riferimento.

In tabella 5.7 invece sono riportati i risultati ottenuti dalle verifiche condotte secondo i criteri esposti nel terzo capitolo. Confrontando i risultati ottenuti con le specifiche riportati in tabella 3.12, si nota come siano rispettati i requisiti prestazionali anche in presenza di disturbi sul dato di pressione. Gli unici valori che si discostano, seppur di poco, dalle specifiche sono quelli evidenziati in tabella 5.7 i quali corrispondono a casi estremi nel modello considerato.

	K_q	K_α	K_i	K_{fwd}
$M = 0{,}38$	0,59568	0,54804	15,21	-1.7218
$\boldsymbol{M = 0,45}$	**0,56876**	**0,49521**	**14,311**	**-1,6178**
$M = 0{,}52$	0,5368	0,43253	13,246	-1,4947
$M = 0{,}53$	0,40299	0,17469	8,881	-0,99364
$\boldsymbol{M = 0,6}$	**0,37982**	**0,13095**	**8,1454**	**-0,91**
$M = 0{,}67$	0,35812	0,090558	7,4661	-0,83309
$M = 0{,}77$	0,21343	-0,13978	3,7605	-0,4467
$\boldsymbol{M = 0.,84}$	**0,21286**	**-0,13466**	**3,871**	**-0.46429**
$M = 0.91$	0,21388	-0,12637	4,0378	-0,48861

Tabella 5.6 Guadagni di chiusura definiti nell'intorno di quelli ottimali

	$Qmax/_{Qss}$	$t_{q_{max}}$ [s]	$\dot{Q}_{max}$ $[\frac{deg/s^2}{g}]$	$t_{\dot{Q}_{max}}$ [s]	$\vartheta_{DB}/_{Q}$ [s]	t_γ [s]
$M = 0.38$	2,0301	0,68947	28,687	0,17344	0,81965	0,78027
M=0.45	**1,9779**	**0,71187**	**26,969**	**0,17283**	**0,78434**	**0,81542**
$M = 0.52$	1,9119	0,74351	24,956	0,17353	0,73637	0,86313
$M = 0.53$	2,1038	0,50367	28,145	0,17333	0,559	0,55571
$\boldsymbol{M = 0.6}$	**1,9884**	**0,5327**	**25,795**	**0,17257**	**0,5112**	**0,60353**
$M = 0.67$	1,8792	0,54628	23,649	0,1744	0,45885	0,65591
$M = 0.77$	1,8724	0,50904	21,154	0,1742	0,20939	0,41813
$\boldsymbol{M = 0.84}$	**1,9315**	**0,5084**	**21,894**	**0,17315**	**0,22746**	**0,50005**
$M = 0.91$	2,0135	0,41079	22,949	0,17208	0,25113	0,37639

Tabella 5.7 Risultati ottenuti dalle verifiche condotte secondo i criteri di Gibson

Capitolo 6

6. Conclusioni e sviluppi futuri

Lo scopo del presente studio è stato quello di verificare i vantaggi offerti delle moderne metodologie di sintesi dei sistemi di controllo, rispetto ad un approccio di tipo classico.
Nello specifico è stata affrontata la sintesi di un Control Augmentation System per un velivolo FBW, sulla base di dati forniti dalla "Piaggio Aero Industries".
Il lavoro svolto è iniziato con lo studio delle tecniche di assegnazione dell'autostruttura mediante retroazione delle uscite. Il metodo, seppur rivelatosi uno strumento efficiente per imporre un adeguato disaccoppiamento tra i modi della dinamica del velivolo, necessita di una certa conoscenza a priori del sistema da controllare. Inoltre, un ulteriore svantaggio è che la stabilità del sistema non è matematicamente garantita. Il problema che si pone è che non è possibile dire in anticipo cosa accada agli $(n-p)$ poli che non vengono assegnati in ciclo chiuso. Alcuni di essi potrebbero instabilizzarsi nonostante la stabilità del sistema di partenza. Nel caso della realizzazione di un controllo di tipo SAS, per cui i poli desiderati in ciclo chiuso non sono troppo lontani da quelli in anello aperto, il problema dell'instabilizzazione non si pone.
Un altro aspetto penalizzante del metodo è che non risulta agevole la traduzione di alcune specifiche (come l'escursione nel tempo delle variabili di stato, di uscita o di controllo) in parametri di progetto. Ciò significa che non è possibile tenerne conto in fase di progettazione.
Per superare tale limite, si è scelto di affrontare la sintesi del CAS mediante la Teoria del Controllo Lineare Quadratico. In particolare si è applicato il metodo ***Linear Quadratic Tracker with Output Feedback*** (LQTOF). È stato definito un indice di prestazione composto da due termini:

- l'errore quadratico tra l'ingresso di riferimento e l'uscita da controllare
- l'energia spesa per il controllo.

Minimizzando l'errore risultano automaticamente ottimizzati i parametri prestazionali generalmente considerati (tempo di salita, sovraelongazione e tempo di assestamento della risposta).

La principale difficoltà incontrata nell'applicazione del metodo, è stata la definizione delle matrici peso che definiscono l'indice di prestazione. Tuttavia, dopo vari tentativi, è stata comunque definita una matrice di pesi che ha permesso di ottenere un set di guadagni in grado di soddisfare le specifiche richieste.

A fronte di un dispendio di tempo nelle fasi iniziali di definizione delle matrici peso e quindi dell' ***indice di prestazione (PI),*** che per sua natura varia a seconda del tipo di problema affrontato, il metodo evidenzia una serie di altri pregi tra i quali: la possibilità di condurre la sintesi direttamente nel dominio del tempo e quello di poter includere nella sintesi, l'ottimizzazione di controllori dinamici di qualsiasi struttura.

I risultati ottenuti con le moderne tecniche di progettazione possono essere ritenuti soddisfacenti.

È emerso da tale approccio una notevole versatilità soprattutto nella fase di "scheduling" dei guadagni, in cui la sintesi dei controllori deve essere ripetuta per ogni punto dell'inviluppo di volo.

Un punto di forza di tali tecniche si è rivelato essere la possibilità di integrarle in procedure automatizzate che, al variare della condizione di volo, forniscono in tempi estremamente rapidi i risultati della sintesi. Non è facile operare in modo altrettanto efficiente con le tecniche classiche, le quali prevedono la chiusura consecutiva, un anello alla volta, dei rami in retroazione.

I guadagni determinati col metodo LQTOF hanno inoltre conferito proprietà di robustezza.

Si è verificato che, assunto un errore di 0,5kPa sulla misura della pressione dinamica, che indurrebbe le leggi di scheduling a fornire un set di guadagni affetti da errore anziché quelli ottimali, non vengono deteriorate le prestazioni richieste.

Per i motivi esposti, vista la complessità sempre crescente dei sistemi di controllo dei velivoli FBW, si ritiene che le tecniche moderne di sintesi siano uno strumento fondamentale a disposizione dei progettisti.

Un ulteriore sviluppo del lavoro, potrebbe essere quello di realizzare una procedura di sintesi che permetta di determinare simultaneamente tutti i guadagni di chiusura e nel contempo ottimizzare i filtri presenti sul ramo feedforward e su quello del pitch damper.

Per superare le difficoltà legate alla definizione della matrice di pesi, soggetta al vincolo sull'osservabilità, si potrebbe sostituire all'indice di prestazione usato uno "Time-Dependent Weighting" come descritto in [3].

Per mettere in conto in modo più rigoroso gli aspetti legati alla robustezza, miglioramenti al lavoro svolto potrebbero ottenersi sviluppando la sintesi mediante la teoria " $\mathcal{H}_\infty$ Mixed Sensitivity". Tale teoria, nata negli ali inizi del 1980, permette al progettista di fondere i requisiti di prestazione e i requisiti di stabilità in presenza di errori, incertezza di modello e perturbazioni derivanti da disturbi o rumore.

BIBLIOGRAFIA

[1] **J.Farineau.** "*Lateral electic flight control laws of a civil aircraft based upon eigen structure assignment technique*" AIAA Paper 89-3594, AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Boston, MA, Augurst, 1989

[2] **F. Amato**. Materiale Didattico del "Corso di Sistemi di Controllo Multivariabile" – Versione 2.2 Ottobre 2012, Università degli Studi di Napoli Federico II.

[3] **B. L. Stevens, and F. L. Lewis**. "*Aircraft Control and Simulation*" 2nd ed, 2003, Wiley Interscience, New York.

[4] **W. H. Press ,S. A**. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, "*Numerical Recipes in Fortran 77. The Art of Scientific Computing*" 2nd Edition, Cambridge University Pess,1992.

[5] **A.N. Andry, E.Y Shapiro, J.C. Chung**. "*Eigenstructure assignment for linear systems*", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 19, no. 5, pp. 711–729, 1983.

[6] **F. Amato, M. Mattei, S. Scala.** "*Linear Quadratic Optimal Control. In: Robust Flight Contro. A Design Challengel*, J-F Magni, S. Bennani, J. Terlouv (Eds), Springer-Verlag, pp. 33-42, 1997.

[7] **S. Skogestad, I.Postlethwaite,** "MULTIVARIABLE FEEDBACK CONTROL Analysis and design" , Second Edition, August 29, 2001

[8] **J. A. Nelder and R. Mead,** "*A simplex method for function minimization*", Comput. J., vol. 7, pp. 308-313, 1964

[9] **D. D. Moerder and A. J. CaliseS.,** *"Convergence of a numerical algorithm for calculating optimal output feedback gains"*, IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-30, no. 9, sept., pp. 900-903, 1985.

[10] **A.E.Jr. Bryson, and Y.-C.Ho**, "Applied Optimal Control". New York: Hemisphere, 1975

[11] **C. Moler, J. Little, S. Bangert.** *"PC-Matlab, The Mathworks",* Inc., 20 North Main St., Suite 250, Sherborn, MA 01770, 1987

[12] **J.J. D'Azzo, C.H. Houpis.** "Linear Control System Analisys and Design", Mc Graw-Hill Book Conpany, 1988

[13] **J.C. Gibson.** *"Evaluation of Altternate Handling Qualities Criteria in Higly Augmented Unstable Aircraft".* AIAA-90-2844-CP,1990

Elenco degli acronimi

ARE	**A**lgebric **R**iccati **E**quation
CAS	**C**ontrol **A**ugmentation **S**ystem
DFP	**D**avidon-**F**letcher-**P**owell
FBW	**F**ly **B**y **W**ire
FCS	**F**ly -**C**ontrol-**S**ystem
LHP	**L**eft **H**alf **P**lane
LQ	**L**ineare **Q**uadratico
LQR	**L**inear **Q**uadratic **R**egulator
LQROF	**L**inear **Q**uadratic **R**egulator with **O**utput **F**eedback
LQTOF	**L**inear **Q**uadratic **T**racker with **O**utput **F**eedback
LTI	**L**ineare **T**empo **I**nvariante
MIMO	**M**ulti-**I**nput/**M**ulti-**O**utput
PI	**P**erformance **I**ndex
SISO	**S**ingle-**I**nput/ **S**ingle –**O**utput

Appendice A

```
% Programma che risolve l'esercizio proposto nell'articolo
% " Eigenstructure Assignment for Linear Systems"
% A.N. Andry, E.Y.Shapiro, J.C.Chung


% l_d =   Vettore degli autovalori desiderati
% l_dr=   Vettore degli autovalori desiderati
          %ottenuto da l_d sostituendo
          %agli autovalori C. Kr+i*Ki  e C.C. Kr-i*Ki,
          %rispettivamente la
          %parte reale Kr e quella immaginaria Ki quindi:
%[K1,K2,...,Kr+i*Ki,Kr-i*Ki,...,Kn ]==>[K1,K2,...,Kr,Ki,...,Kn ]
% Vd=    Struttura della matrice degli autovettori desiderati.
          %I termini NaN, possono assumere qualsiasi valore.

matlat
A=ALAT;
B=BLAT;
C=CLAT;
Vet=Vect;
l_d=(l_d);
%_____________________________________________________________
%Verifica sulla controllabilità del sistema (A,B)
[Attenzione out2]=control_check(A,B);
%_____________________________________________________________

na=size(A);
[nb,mb]=size(B);
[nc,mc]=size(C);

if out2==1
% Procedura per determinare gli autovettori
%raggiungibili(Vachieved) Va
%Si usa la tecnica dei minimi quadrati:
%si cercano i vettori Vai che
%rendono minimo J= ||Vdi-Vai||^2
    for i=1:length(l_d)

      fix{i}=isfinite(Vect(:,i)); %fix è l'indice degli elementi
                                  %di Vet fissati dal progettista
      l{i}=Vet(fix{i},i);         %l prende le righe di Vet
                                  %che corrispondono a fix
      S{i}=l_d(i)*eye(na(1))-A;
      L{i}=pinv(l_d(i)*eye(na(1))-A)*B;
      Lt{i}=L{i}(fix{i},:);
      z{i}=pinv(Lt{i}'*Lt{i})*Lt{i}'*l{i};
      Va{i}=L{i}*z{i};
    end

Va=horzcat(Va{1:end});
K=pinv(B)*(Va*diag(l_d)-A*Va)*pinv(C*Va);
K=real(K);
Acl=A+B*K*C;

n=rank(A);
```

```
m=rank(B);
r=rank(C);
mm=size(B);
% VETTORE DEGLI AUTOVALORI 'REALI'
l_dr=(l_d)';
%% Cambio di variabile secondo.......
P=[0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0;
   1 0 0 0 0;
   0 1 0 0 0;
   0 0 1 0 0;
   0 0 0 1 0;
   0 0 0 0 1];
T=horzcat(B,P);

At=inv(T)*A*T;
Bt=inv(T)*B;
Ct=C*T;
lamb=l_d;
Vat=inv(T)*Va; % nell'articolo è indicata con V

    for i=1:length(l_d)
    zz(:,i)=Vat(1:m,i);
    Z(:,i)=lamb(i)*zz(:,i);
    end
V=Vat;
omega=Ct*V;
A11=At(1:m,1:m);
A12=At(1:m,m+1:n);
A21=At(m+1:n,1:m);
A22=At(m+1:n,m+1:n);
A1=[A11,A12];
psi=Z-A1*V;
F=(Z-A1*V)*pinv(omega);
```

Appendice B

B1 track

Si riporta di seguito lo script denominato " track" che esegue l'ottimizzazione LQTOF.

```
%_____________________________________________________________________
% Script che risolve il problema di regolazione LQTOF sfruttando il
% metodo di minimizzazione di Davidon-Fletcher-Powell
% (D.F.P. è un Metodo Quasi-Newton) con aggiornamento della matrice
% Hessiana dato dal metodo di Broyden-Fletcher-Goldfarb_Shanno (B.F.G.S.)
%-----------------------------------------------------------------------
%
% Per farlo girare basta inserire nel riquadro 'CONDIZIONI INIZIALI'
% la matrice dei guadagni di partenza Ko, il numero di iterazioni massimo
% (di tentativo) ITMAX, la tolleranza sulla convergenza a zero del
% gradiente gtol, lo step massimo STPMAX,  epsilon EPS

tic
disp('Track')

%---------------------- CONDIZIONI INIZIALI ----------------------------

ITMAX=500;
gtol=0.001;
STPMAX=0.1;
ALF=1.0000e-004;
TOLX=1.0000e-7;
EPS=3*10^(-8);


%---------------------- DATI DEL PROBLEMA ------------------------------

lonpiaggio % script che carica i dati del modello in STVA,
           % la matrice dei guadagni iniziali Ko
           % le matrici dei pesi Q,R

%--------------- Controllo l'osservabilità di (sqrt(Q),A) ---------------

[out1] = observ_check(A,sqrt(Q));

%--------- Controllo che la matrice Ko di stabilizzi il sistema ---------

Aco=A-B*Ko*C;   % Matrice del sist in ciclo chiuso
Avalo=eig(Aco); % Calcolo gli autovalori in ciclo chiuso
realAvalo=real(Avalo);
if realAvalo<0  % Questo ciclo dice se Ko stabilizzi il sistema
     disp('Ko: OK! Ko stabilizza il sistema')

     else
    disp('Ko: No Ko stabilizza il sistema')
    return
end
```

```
%------------------------ STEP 0 ----------------------------------------

[n2,m2]=size(Ko);
AUX=Ko';
p=AUX(:); %%Con k si indica la matrice K ridotta a vettore
ii=0;
flop=1; % flop diventa 0 e termina la procedura quando gli
        % autovalori della matrice P sono maggiori di zero
while flop==1  %%INIZIA IL PROCESSO DI MINIMIZZAZIONE DI J
    ii=ii+1;
[n,m]=size(p);

%----- FUNZIONE CHE MINIMIZZA L'INDICE DI PRESTAZIONE -------------------
[pnew,Knew,fret,AP,iter]=dfpminlqt(p,n,n2,m2,gtol,STPMAX,EPS,TOLX,ITMAX);
%-------------------------------------------------------------------------

fly=1;
[pnew,Knew,fret,AP,iter]=dfpminlqt(p,n,n2,m2,gtol,STPMAX,EPS,TOLX,ITMAX);
fly=1;
    for i=1:length(AP) % Verifico che P sia definita positiva
        if AP(i)<0     % se non è vera da 'dfpminlqr'si è usciti
            fly=0;     % per la stessa condizione quindi riprendo
        end            % il punto di partenza p e vado avanti
    end                % con un altro passo: STPMAX=STPMAX/2;
    if fly==0
       p=Knew;
       STPMAX=0.5*STPMAX;
    else
        flop=0;
    end
end
 AUS=zeros(m2,n2);
 AUS(:)=pnew;
 K=AUS';
 disp('Il calcolo è terminato con successo')
 Kopt=K
 J=fret
 N_iteraz=iter
Tempo=toc

Ac=A-B*Kopt*C;

%---- Setta le costanti e le matrici del modello simulink 'cas'
[aereo,ALON,BLON,CLON,DLON,K_fwd]=var_stato_wq(M);
sensori;
attuatore;
```

B2 dfpminlqt

```
function [pnew,Knew,fret,AP,iter]=dfpminlqt(p,n,n2,m2,...
                                          gtol,STPMAX,EPS,TOLX,ITMAX)

EPS1=EPS;
% TOLX1=TOLX;
% ITMAX=500;
% gtol=0.0001;
% STPMAX=0.001;

%_________ CALCOLO LA FUNZIONE E IL GRADIENTE DELLA FUNZIONE_________
g=tra_dfun(p,n2,m2);       %%gradiente della funzione
[fp,AP]=tra_fun(p,n2,m2);  %%funzione J calcolata in k. f=J;
%_____________________________________________________________________
%_____________________________________________________________________
% INIZIALIZZAZIONE DELL'HESSIANO
% DELLA DIREZIONE DI RICERCA
% E DELLO stpmax

sum=0;
hessian=zeros(n,n);       % matrice Hessiana
xi=zeros(1,n);
    for i=1:n
        hessian(i,i)=1;   % Prendo hessian = I
        xi(i)=-g(i);      % Direzione iniziale di minimizzazione
        sum=sum+p(i)^2;   %->ci si muove nella direzione del gradiente

    end
stp=max(sqrt(sum),n);     %%n= numero di componenti di k
stpmax=STPMAX*stp;        %%Definizione dello stpmax
%_____________________________________________________________________

%%________INIZIA IL LOOP PRINCIPALE DELLA FUNZIONE DFPMIN_____________

for its=1:ITMAX
    iter=its;

    %% SI CERCA UN MINIMO TRAMITE LA FUNZIONE 'lnsrch_lqt'
    %% DATI: p=punto di partenza,
    %%        xi=direzione di ricerca,
    %%        fp=Jp Valore della funzione in p,
    %%         g=gradiente di della funzione in p,
    %%        stpmax= step massimo,
    %%        n2,m2,ro --> parametri usati dalla funzione 'lqrfun'
    %%                     richiamata in lnsrch
    %% USCITE: pnew=nuovo punto di minimo lungo la direzione di ricerca
    %%         fret=Jpnew  Nuovo valore assunto dalla funzionein pnew
    %%         AP=Autovalori della matrice P calcolata da 'lqrfun'
    %%         stpmax=Valore dello step massimo ricalcolato per
    %%         l'iterazione successiva

    [pnew,fret,AP,stpmax]=lnsrch_lqt(n,p,xi,fp,g,stpmax,n2,m2);
        EPS=3*10^(-15);
        TOLX1= 4*EPS;
        for i=1:length(AP)
             if AP(i)<0
```

```
                disp('P ha autovalori negativi')
            Knew=p;     %%Definisce un nuovo punto iniziale
% its=ITMAX+1;
            return
            else
                Knew=pnew;
            end
         end
  fp=fret;
% end
           for i=1:n
             % Aggiorna la direzione di ricerca ed il punto corrente
             xi(i)=pnew(i)-p(i);
             p(i)=pnew(i);
           end
    test1=0;  % Test per la convergenza su (pnew-p)
        for i=1:n
        tt=max(abs(p(i)),1);
        temp=abs(xi(i)/tt);
            if temp>test1
            test1=temp;
            end
        end

       if test1<TOLX1  %se i punti pnew e p sono molto vicini,
                       %termina la procedura
%           disp('pnew e p tendono a coincidere')
%           its=ITMAX+1;
%           flop=0;
%           break
           return
        end
        dg=zeros(1,n);
        for i=1:n
        dg(i)=g(i);
        end
 g=tra_dfun(p,n2,m2); % CALCOLO IL NUOVO VALORE DEL GRADIENTE
                      % Test per la verifica dell'annullarsidel gradiente
 test2=0;
 den=max(fret,1);
        for i=1:n
        z=max(abs(p(i)),1);
        temp=(abs(g(i))*z)/den;
            if temp>test2
            test2=temp;
            end
        end
        if test2<gtol
% disp('Il gradiente converge a zero')
% its=ITMAX+1;
% flop=0;
            return
        end
% Calcolo la differenza tra i gradienti
         for i=1:n
        dg(i)=g(i)-dg(i);
        end
        hdg=zeros(n,1);
% Calcola l'approssimazione dell'Hessiano
```

```
        for i=1:n
            for j=1:n
            hdg(i)=hdg(i)+hessian(i,j)*dg(j);
            end
        end
% Calcola il prodotto diretto
 fac=0;
 fae=0;
 sumdg=0;
 sumxi=0;
        for i=1:n
         fac=fac+dg(i)*xi(i);
         fae=fae+dg(i)*hdg(i);
         sumdg=sumdg+dg(i)^2;
         sumxi=sumxi+xi(i)^2;
        end
 % Se fac non è sufficientemente positivo non aggiorna i prodotti
  z=EPS1*sumdg*sumxi;
        if fac^2>z
            fac=1/fac;
            fad=1/fae;

% Vettore per il quale il metodo BFGS differisce da DFP
            for i=1:n;
                dg(i)=fac*xi(i)-fad*hdg(i);
            end
% formula di aggiornamento di BFGS
            for i=1:n
                for j=1:n
 hessian(i,j)=hessian(i,j)+fac*xi(i)*xi(j)-fad*hdg(i)*hdg(j)...
 +fae*dg(i)*dg(j);
                end
            end
         end

% Calcolo la nuova direzione nella quale procedere;
        for i=1:n
            xi(i)=0;
            for j=1:n
            xi(i)=xi(i)-hessian(i,j)*g(j);
            end
        end

   end      % Inizia l'iterazione successiva
```

B3 lnsrch_lqt

Algoritmo per determinare la direzione di ricerca del minimo: "lnsrch_lqt"

```
%_____________________________________________________________________
%[x,f,AP,stpmax]=lnsrch_lqt(n,xold,p,fold,g,n2,m2,r0,Kold)
%
%---- Ingressi usati direttamente dalla funzione 'lnsrch_lqt'
%n=dimensione di xold
%xold=punto di partenza;
%p=direzione di ricerca;
%g=gradiente della funzione;
%fold=funzione valutata in xold
%g=gradiente della funzione valutato in xold
%Ingressi usati dalle funzioni trafun e tradfun inserite in lnsrch
%[n2,m2]=size(A)
%r0
%_____________________________________________________________________


function [pnew,fret,AP,stpmax]=lnsrch_lqt(n,p,xi,fp,g,stpmax,n2,m2);
% pold=p;
%% PARAMETRI
ALF=1.0000e-004;
TOLX=1.0000e-007;


%% Calcola la lunghezza del passo di Newton:  L_PAS_N ;
L_PAS_N=norm(xi); %% || xi ||

% verifica che lo step di Newton non superi lo stpmax.
% Nel caso in cui ciò avvenga lo riduce; del fattore stpmax/sum;

  if L_PAS_N>stpmax
      xi=xi*stpmax/L_PAS_N; % Scale the step if attempted
                            % step is too long.
  end

slope=0;
for i=1:n
slope=slope+g(i)*xi(i);
end

test=0;      %Compute lambdamin.
for i=1:n
vas=abs(p(i));
temp=abs(xi(i))/max(vas,1);
if temp> test
   test=temp;
end
end
if test==0
    alamin=TOLX;
else
    alamin=TOLX/test;
```

```
end
%Minima lunghezza del passo

pnew=zeros(n,1);
alam=1;          %In prima battuta si tenta col passo di Newton.
                 % ausiliare
check=1;
% Start of iteration loop.
% L'iterazione inizia col ciclo while, e finisce quando
% il nuovo punto calcolato, soddisfa le condizioni richieste
while check==1  % Loop principale di lnsrch

    pnew=p+alam*xi';     %Costruisce un nuovo punto x=xold+alam*p
                         %in cui la funzione fun dovrebbe assumere
                         %un valore minore che in xold

    [fret,AP]=tra_fun(pnew,n2,m2);
%-------------------------------------------------------------------------
    for i=1:length(AP)
     if AP(i)<0
          check=0;
%           return
     end
    end
%-------------------------------------------------------------------------

   fapp=fp+ALF*alam*slope;
    if alam<alamin
%          disp('lambda è minore di lambda minimo')
        for i=1:n
        pnew(i)=p(i);
        end
         check=0;
%         return
    elseif fret<=fapp  %%Sufficient function decrease.
%         disp('fret<=pippo')
         check=0;
%         return

        else          %Backtrack. (cambio passo)
         if alam==1   %First time (All'inizio sitenta col passo di N.).
             tmplam=-slope/(2*(fret-fp-slope));
          else        %Subsequent backtracks.
             rhs1=fret-fp-alam*slope;
             rhs2=f2-fold2-alam2*slope;
             a=(rhs1/alam^2-rhs2/alam2^2)/(alam-alam2);
             b=(-alam2*rhs1/alam^2+alam*rhs2/alam2^2)/(alam-alam2);
                if a==0
                  tmplam=-slope/(2*b);
                 else
                  disc=b*b-3*a*slope;   %discriminante
%_________________________________________________________________________
                  tmplam=(-b+sqrt(disc))/(3*a);
                end
                  if tmplam>0.5*alam
                     tmplam=0.5*alam
                  end
         end
    end
```

```
%_____________________________________________________________________________
%                      if disc<0
%                       tmplam=0.5*alam;
%                       elseif b<=0
%                       tmplam=(-b+sqrt(disc))/(3*a);
%                       else
%                        tmplam=-slope/(b+sqrt(disc));
%
%                       end
%                  end
%                 if tmplam> 0.5*alam
%                    tmplam=.5*alam;
%                 end
%
%             end
%     end
if check==1
alam2=alam;
f2=fret;
fold2=fp;
jok=[tmplam 0.1*alam];
alam=max(jok);
end

end
```

B4 tra_fun

Funzione da minimizzare

```
function [J,AP]=tra_fun(p,n2,m2)

lonpiaggio

r0=1;%% intensità del gradino d'ingresso
AUS=zeros(m2,n2);
AUS(:)=p;
K=AUS';
I=eye(max(size(r0)));
Ac=A-B*K*C;
Bc=G-B*K*F;
X=inv(Ac)*Bc*r0*r0'*Bc'*(inv(Ac))';
e=(I+H*inv(Ac)*Bc)*r0;
aus=C'*K'*R*K*C+Q;
aus=aus';
Act=Ac';
P=lyap(Act,aus);
AP=eig(P);
J=0.5*trace(P*X)+0.5*e'*V*e;
```

B5 tra_dfun

```
function grd=tra_dfun(p,n2,m2)
 lonpiaggio

r0=1; % intensità del gradino d'ingresso

AUS=zeros(m2,n2);
AUS(:)=p;
K=AUS';
Ac=A-B*K*C;
Bc=G-B*K*F;
x=-inv(Ac)*Bc*r0;
y=C*x+F*r0;
X=x*x';
aus=C'*K'*R*K*C+Q;
aus=aus';
Act=Ac';
P=lyap(Act,aus);
S=lyap(Ac,X);
gr=(R*K*C*S*C'-B'*P*S*C'+B'*(inv(Ac))'*...
    (P+H'*V*H)*x*y'-B'*(inv(Ac))'*H'*V*r0*y');
gr=gr';
grd=gr(:);
```

B6 lonpiaggio

```
%_________________________________________________________________________
% SCRIPT DENOMINATO "lonpiaggio"
%
% VARIANDO IL NUMERO DI MACH SI OTTENGONO LE MATRICI DI STATO DEL C.A.S.
% OTTENUTE TRAMITE LO SCRIPT: "modello_wq"

% I VALORI SELEZIONABILI SONO M=0.45, M=0.6, M=0.84;

M='0.6';
%_________________________________________________________________________
switch M
   case {'0.45'}
      M=0.45;
      load  matlonpNF045
      Ko=[-1 1 1]; %%% K iniziale per M=0.45
   case '0.6'
       M=0.6;
       load matlonpNF06
       Ko=[-0.56876  -0.49521  14.311];
   case '0.84'
       M=0.84;
       load matlonpNF084
       Ko=[-0.3798   -0.1310    8.1454];
    otherwise
       disp('M non valido, settare M=0.45, M=0.6 o  M=0.84')
end
A=Apc; B=Bpc; C=Cpc; F=Fpc; G=Gpc; H=Hpc;

Q=(H'*H);

Q(2,2)=1000;
Q(3,3)=100000;
Q(10,10)=100000;
Q(15,15)=10;
Q(16,16)=10000;
Q(18,18)=1000000;
Q(22,22)=10;

AQ=eig(Q);
M=num2str(M);
switch M
   case {'0.45'}
   Ro=0.01;
   M=0.45;
   case '0.6'
 Ro=0.01;
   M=0.6;
   case '0.84'
   Ro=0.01;
   M=0.84;
end
%%%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XX
r0=1;
V=0;
R=Ro;
```

Appendice C

Vettore di stato: $\boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} w \\ q \\ \vartheta \end{Bmatrix}$ Vettore degli ingressi: $\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} elev \\ stab \\ th_{left} \\ th_{right} \end{Bmatrix}$

Vettore delle uscite: $\boldsymbol{y} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ TAS \\ q \\ \vartheta \\ n_z \\ \gamma \\ \dot{q} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix}$

MATRICI DI STATO PER LA CONDIZIONE DI VOLO:

$h = 29300\ ft$ $M = 0.45$ $\alpha_0 = 0$

$$A_{LON\_0.45} = \begin{vmatrix} -0{,}6709 & 135{,}2 & 0 \\ -0{,}05321 & -1{,}001 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad B_{LON\_0.45} = \begin{vmatrix} -0{,}08242 & -0{,}2631 & -0{,}01607 & -0{,}01607 \\ -0{,}08902 & -0{,}1658 & -0{,}03506 & -0{,}03506 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$C_{LON\_0.45} = \begin{vmatrix} 0{,}4187 & 0 & 0 \\ -1{,}14E\text{-}24 & 0 & 0 \\ 0 & 57{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 57{,}3 \\ 0{,}06841 & 0{,}171 & 0 \\ -0{,}4187 & 0 & 57{,}3 \\ -3{,}049 & 57{,}33 & 0 \\ -0{,}2809 & 56{,}59 & 0 \end{vmatrix} \qquad D_{LON\_0.45} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}008405 & 0{,}02683 & 0{,}001639 & 0{,}001639 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5{,}1 & -9{,}501 & -2{,}009 & -2{,}009 \\ -0{,}03451 & -0{,}1102 & -0{,}00673 & -0{,}00673 \end{vmatrix}$$

MATRICI DI STATO PER LA CONDIZIONE DI VOLO:

$h = 29300\ ft \qquad M = 0.6 \qquad \alpha_0 = 0$

$$A_{LON\_06} = \begin{vmatrix} -0{,}9629 & 180{,}1 & 0 \\ -0{,}07696 & -1{,}367 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad B_{LON\_0.6} = \begin{vmatrix} -0{,}1535 & -0{,}49 & -0{,}01783 & -0{,}01783 \\ -0{,}1658 & -0{,}3088 & -0{,}0389 & -0{,}0389 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$C_{LON\_0.6} = \begin{vmatrix} 0{,}314 & 0 & 0 \\ 8{,}77E\text{-}26 & 0 & 0 \\ 0 & 57{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 57{,}3 \\ 0{,}09819 & 0{,}2351 & 0 \\ -0{,}314 & 0 & 57{,}3 \\ -4{,}409 & -78{,}31 & 0 \\ -0{,}3024 & 56{,}57 & 0 \end{vmatrix} \qquad D_{LON\_0.6} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}01565 & 0{,}04997 & 0{,}001819 & 0{,}001819 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9{,}499 & -17{,}69 & -2{,}229 & -2{,}229 \\ -0{,}0482 & -0{,}1539 & -0{,}0056 & -0{,}0056 \end{vmatrix}$$

MATRICI DI STATO PER LA CONDIZIONE DI VOLO:

$h = 29300\ ft \qquad M = 0.84 \qquad \alpha_0 = 0$

$$A_{LON\_0.84} = \begin{vmatrix} -1{,}696 & 252{,}7 & 0 \\ -0{,}1196 & -1{,}558 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad B_{LON\_0.84} = \begin{vmatrix} -0{,}3424 & -1{,}093 & -0{,}01986 & -0{,}01986 \\ -0{,}37 & -0{,}6893 & -0{,}04332 & -0{,}04332 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$C_{LON\_0.84} = \begin{vmatrix} 0{,}2243 & 0 & 0 \\ -9{,}71E\text{-}22 & 0 & 0 \\ 0 & 57{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 57{,}3 \\ 0{,}1729 & 0{,}275 & 0 \\ -0{,}2243 & 0 & 57{,}3 \\ -6{,}854 & -89{,}25 & 0 \\ -0{,}3803 & 56{,}69 & 0 \end{vmatrix} \qquad D_{LON\_0.84} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}03492 & 0{,}1115 & 0{,}002025 & 0{,}002025 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -21{,}2 & -39{,}5 & -2{,}482 & -2{,}482 \\ -0{,}07681 & -0{,}2452 & -0{,}00445 & -0{,}00445 \end{vmatrix}$$

C1 fly_cond

Di seguito è riportato una function realizzata in Matlab®, denominata "fly_cond" che dati in ingresso una condizione di volo, restituisce le matrici di stato che descrivono il corto periodo del velivolo. Le matrici sono quelle riportate in precedenza ma ridotte ai soli termini d'interesse. Cioè sono state omesse la terza riga e la terza colonna di ALON (in pratica è stata trascurata l'equazione $\dot{\vartheta} = q$);

```
% QESTA FUNZIONE PERMETTE DI OTTENERE LE MATRICI DI STATO
% ALON,BLON,CLON,DLON RELATIVE AL CORTO PERIODO DEL VELIVOLO,
% INSERENDO IN INGRESSO UNA CONDIZIONE DI VOLO
% Le condizioni di volo accettate sono:
% M= 0.45; 0.6 o 0.84
% quota=29300 ft
% AoA=0;
% Gli ingressi sono: de, ds dt per il piano longitudinal
% Le uscite sono: alfa, TAS, q, teta, nz, gamma, qdot, alfadot
%[ALON BLON CLON DLON]=fly_cond(M,quota,AoA)
%_____________________________________________________________


function [ALON BLON CLON DLON]=fly_cond(M,quota,AoA)

%-------------------------------------------------------------
% Mach 0.6  quota 29300 ft   AoA=0;

ALON_06=[-0.9629   180.1    ;
         -0.07696   -1.367 ];

BLON_06=[-0.1535  -0.49    -0.03566 ;
         -0.1658  -0.3088  -0.0778 ];

CLON_06=[  0.314        0;
           8.768e-026   0;
           0           57.3;
           0.09819      0.2351;
          -4.409      -78.31;
          -0.3024      56.57];

DLON_06=[0          0            0       ;
         0          0            0       ;
         0          0            0       ;
         0.01565    0.04997      0.003638;
        -9.499    -17.69        -4.458;
        -0.0482    -0.1539      -0.0112];

%-----------------------------------------------------------

% Mach 0.45  quota 29300 ft   AoA=0;

ALON_045=[-0.6709    135.2   ;
          -0.05321    -1.001];

BLON_045=[-0.08242    -0.2631    -0.032140  ;
          -0.08902    -0.1658    -0.070120 ];
```

```
CLON_045=[0.4187              0     ;
         -1.138*10^(-24)      0     ;
          0                  57.3   ;
          0.06841             0.171 ;
         -3.049             -57.33  ;
         -0.2809             56.59 ];

 DLON_045=[0            0       0           ;
           0            0       0           ;
           0            0       0           ;
           0.008405     0.02683 0.003278    ;
           -5.1       -9.501    -4.0180     ;
           -0.03451   -0.1102  -0.013460   ];

%-------------------------------------------------------------

%Mach 0.84   quota 29300 ft

ALON_084=[-1.696    252.7     ;
          -0.1196   -1.558   ];

BLON_084=[-0.3424   -1.093      -0.039720 ;
          -0.37    -0.6893     -0.086640 ];

CLON_084=[0.2243             0      ;
         -9.708*10^(-22)     0      ;
          0                 57.3    ;
          0.1729             0.275  ;
         -6.854            -89.25   ;
         -0.3803            56.69  ];

DLON_084=[ 0            0        0        ;
           0            0        0        ;
           0            0        0        ;
           0.03492      0.1115   0.00405   ;
         -21.2        -39.5     -4.9640   ;
          -0.07681     -0.2452  -0.0089080 ];
%---------------------------------------------------------------

if quota==29300
if M==0.45 && AoA==0
    ALON=ALON_045;
    BLON=BLON_045;
    CLON=CLON_045;
    DLON=DLON_045;

end
if M==0.6 && AoA==0
    ALON=ALON_06;
    BLON=BLON_06;
    CLON=CLON_06;
    DLON=DLON_06;
end
if M==0.84 && AoA==0
    ALON=ALON_084;
    BLON=BLON_084;
    CLON=CLON_084;
    DLON=DLON_084;
end
end
```

C2 var_stato_wq

Di seguito sono riportate le function "Kfwd" e "var_stato_wq" realizzate in Matlab® allo scopo di ottenere rispettivamente il guadagno K_fwd sul ramo feedforward e il modello in variabili di stato del velivolo, al variare della condizione di volo.

```
%_____________________________________________________
% QUESTA FUNCTION FORNISCE IL VALORE DEL GUADAGNO K_FWD
% AL VARIARE DELLA CONDIZIONE DI VOLO.
% È STATO ASSUNTO K_FWD=-0.91 NELLA CONDIZIONE DI
% RIFERIMENTO M=0.6 E SUCCESSIVAMENTE. NELLE ALTRE
% CONDIZIONI DI VOLO K_FWD È STATO RICAVATO SCALANDO
% IL VALORE ASSUNTO IN QUELLA DI RIFERIMENTO
%_____________________________________________________

function [K_fwd,U,Q]=Kfwd(M)

% CONDIZIONE DI RIFERIMENTO Mach=0.6
ft=0.3048;      % conversione da feet a m
h=29300*ft; %%feet
[a] = IntStandAir_SI(h,'a');
[ro] = IntStandAir_SI(h,'rho');
M06=0.6;
U06=(a*M06);
Q06=0.5*ro*U06^2;

% CONDIZIONE DI VOLO M=06  (di riferimento)
if M==0.6
K_fwd=-0.91;
U=U06;
Q=Q06;
end
%-----------------------------------------------------

% %% CONDIZIONE DI VOLO M=0.45
if M==0.45
U=(a*M);
Q=0.5*ro*U^2;
K_fwd=-0.91*Q06/Q;
end
%-----------------------------------------------------
% %% CONDIZIONE DI VOLO M=0.84
if M==0.84
U=(a*M);
Q=0.5*ro*U^2;
K_fwd=-0.91*Q06/Q;
end
%_____________________________________________________
```

```
%_____________________________________________________________________

%FUNZIONE CHE COSTRUISCE IL MODELLO IN VARIABILI DI STATO DEL VELIVOLO
%AL VARIARE DELLA CONDIZIONE DI VOLO
%_____________________________________________________________________


function [aereo,ALON,BLON,CLON,DLON,K_fwd]=var_stato_wq(M)
[K_fwd]=Kfwd(M)
[ALON,BLON,CLON,DLON]=flycond(M,29300,0);
aereo = ss(ALON,BLON,CLON,DLON,...
          'statename',{'w' 'q'},...
          'inputname',{'de' 'ds' 'dt'},...
          'outputname',{'alfa' 'TAS' 'q'  'nz'  'qdot' 'alfadot'} );
```

---xxx---

C3 Modello dei sensori e dell'attuatore

```
%|                    SENSORI PER IL FATTORE DI CARICO
%|
%|
%|           Nz_SNS_DYN       Nz_SNS_ASYN     Nz_SNS_SH      Nz_SNS_CTD
%|        _________________      __________      __________      __________
%|SIM_NZ |                |    |          |    |          |    |          |
%|  ______|    SNS_DYN    |--->|  ASYN    |--->|   S/H    |--->|   CTD    |--
>
%|       |                |    |          |    |          |    |          |
%|       |________________|    |__________|    |__________|    |__________|
%|
%|
%|
%|                      %% SENSORI D'INCIDENZA
%|          AOA_SNS_DYN                      AOA_SNS_SH     AOA_SNS_CTD
%|        _________________                   __________      __________
%|SIM_AOA|                |                   |          |    |          |
%|  ______|    SNS_DYN    |------------------>|   S/H    |--->|   CTD    |--
>
%|       |                |                   |          |    |          |
%|       |________________|                   |__________|    |__________|
%|
%|
%|          %% SENSORI PER LA VELOCITA' ANGOLARE DI BECCHEGGIO Q
%|           Q_SNS_DYN        Q_SNS_ASYN      Q_SNS_SH      Q_SNS_CTD
%|        _________________      __________      __________      __________
%| SIM_Q |                |    |          |    |          |    |          |
%|  ______|    SNS_DYN    |--->|  ASYN    |--->|   S/H    |--->|   CTD    |--
>
%|       |                |    |          |    |          |    |          |
%|       |________________|    |__________|    |__________|    |__________|
%|
%|
%|                    SENSORI PER LA VELOCITA'ANGOLARE--- Q_SNS_DYN
%|                    PER IL FATTORE DI CARICO---------- NZ_SNS_DYN
%|                    E PER L'ANGOLO D'INCIDENZA--------AOA_SNS_DYN
%|
%| La dinamica del sensori è modellata come un ritardo puro (e^(-0.01s))
%| moltiplicato per un sistema del secondo ordine.
%|
%|   SNS_DYN:
%|            -0.005 s + 1            Wn^2
%|            ------------ . -----------------------
%|             0.005 s + 1    s^2+2*zita*Wns+Wn^2
%|
%%ACCELERATION SENSOR DYNAMICS---NZ_SNS_DYN

%%  NZ_SNS_DYN;  NZ_SNS_ASYN;  NZ_SNS_SH;  NZ_SNS_CTD
%% AOA_SNS_DYN;               AOA_SNS_SH; AOA_SNS_CTD
%%   Q_SNS_DYN;   Q_SNS_ASYN;   Q_SNS_SH;   Q_SNS_CTD; LEAD_LAG

Wn_nz=43;     %rad/s
zita_nz=0.7;
Taus=0.01;    %secondi

NZ_SNS_DYN_II=tf([Wn_nz^2],[1 2*zita_nz*Wn_nz Wn_nz^2 ]);
NZ_SNS_DYN_pade=tf([-Taus/2 1],[Taus/2 1 ]);
```

```
% funzione di trasferimento di NZ_SNS_DYN
NZ_SNS_DYN=NZ_SNS_DYN_pade*NZ_SNS_DYN_II;

%%AIRDATA SENSOR DYNAMICS--------AOA_SNS_DYN
Wn_AOA=33;       %rad/s
zita_AOA=0.7;
Taus_AOA=0.01;    %secondi

AOA_SNS_DYN_II=tf([Wn_AOA^2],[1 2*zita_AOA*Wn_AOA Wn_AOA^2 ]);
AOA_SNS_DYN_pade=tf([-Taus_AOA/2 1],[Taus_AOA/2 1 ]);

% funzione di trasferimento di AOA_SNS_DYN
AOA_SNS_DYN=AOA_SNS_DYN_pade*AOA_SNS_DYN_II;

%%RATE SENSOR DYNAMICS----------Q_SNS_DYN
Wn_q=43;     %rad/s
zita_q=0.7;
Taus_q=0.01;    %secondi

Q_SNS_DYN_II=tf([Wn_q^2],[1 2*zita_q*Wn_q Wn_q^2 ]);
Q_SNS_DYN_pade=tf([-Taus_q/2 1],[Taus_q/2 1 ]);
% funzione di trasferimento di Q_SNS_DYN
Q_SNS_DYN=Q_SNS_DYN_pade*Q_SNS_DYN_II;

%-----------------------------------------------------------------
%%% AVS Bus asynch average delay.
%% E' modellato allo stesso modo per Q e Nz  è un Padè:

%%            -Tasyn s + 1
%%            ------------
%%             Tasyn s + 1

Tasyn=0.0125; %secondi
%% funzione di trasferimento di Q_SNS_ASYN
Q_SNS_ASYN=tf([-Tasyn/2 1],[Tasyn/2 1 ]);
%% funzione di trasferimento di NZ_SNS_ASYN
NZ_SNS_ASYN=tf([-Tasyn/2 1],[Tasyn/2 1 ]);

%-----------------------------------------------------------------
%% SENSOR SAMPLE-HOLD EFFECTS,
%% COMMON TO ALL AXES. Q_SNS_S/H; NZ_SNS_S/H
%% E' modellato allo stesso modo per Q e Nz e AOA:  è un Padè:

%%            -Ts s + 1
%%            ------------
%%             Ts s + 1

%% Per Q_SNS_S/H; NZ_SNS_S/H
Ts=12.5/1000;  %secondi
%% funzione di trasferimento di NZ_SNS_SH
NZ_SNS_SH=tf([-Ts/2 1],[Ts/2 1 ]);
%% funzione di trasferimento di Q_SNS_SH
Q_SNS_SH=tf([-Ts/2 1],[Ts/2 1 ]);

%% Per AOA_SNS_S/H;
Ts_AOA=25/1000;  %secondi

%% funzione di trasferimento di AOA_SNS_SH
AOA_SNS_SH=tf([-Ts_AOA/2 1],[Ts_AOA/2 1 ]);
```

```
%-------------------------------------------------------------
%%%                    COMPUTATIONAL DELAY (CTD)

%%% NZ_SNS_CTD;  AOA_SNS_CTD;
%%% Q_SNS_CTD; COMPUTATIONAL DELAY (CTD) FOR

%%% SENSOR (Uguale per tutti i sensori)
%%% E' modellato con un Padè quindi

%%            -Tctd s + 1
%%            ------------
%%             Tctd s + 1

Tctd=6.25/1000; %secondi
%% funzione di trasferimento di NZ_SNS_CTD
NZ_SNS_CTD=tf([-Tctd/2 1],[Tctd/2 1 ]);

%% funzione di trasferimento di AOA_SNS_CTD
AOA_SNS_CTD=tf([-Tctd/2 1],[Tctd/2 1 ]);

%% funzione di trasferimento di Q_SNS_CTD
Q_SNS_CTD=tf([-Tctd/2 1],[Tctd/2 1 ]);


%%%% RETE LEAD-LAG
TN=0.3;
TD=0.18;
%% funzione di trasferimento di LEAD_LAG
LEAD_LAG=tf([-TN 1],[TD 1 ]);

sens_NZ=zpk(NZ_SNS_DYN*NZ_SNS_ASYN*NZ_SNS_SH*NZ_SNS_CTD);
%disp('sens_NZ=');
sens_NZ;

sens_AOA=zpk(AOA_SNS_DYN*AOA_SNS_SH*AOA_SNS_CTD);
%disp('sens_AOA=');
sens_AOA;

sens_Q=zpk(Q_SNS_DYN*Q_SNS_ASYN*Q_SNS_SH*Q_SNS_CTD);
%disp('sens_Q=');
sens_Q;

sQ1=series(ss(Q_SNS_DYN),ss(Q_SNS_ASYN));
sQ2=series(ss(Q_SNS_SH),ss(Q_SNS_CTD));
sQ=series(sQ1,sQ2);
% [Asens_Nz,Bsens_Nz,Csens_Nz,Dsens_Nz]=linmod2('sens_Nz');

% [Asens_q,Bsens_q,Csens_q,Dsens_q]=linmod2('sens_q');
%
% [Asens_alfa,Bsens_alfa,Csens_alfa,Dsens_alfa]=linmod2('sens_alfa');


%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
%%FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DELL'ATTUATORE: ELEV_EHACT
Wn_att=32; %rad/s
zita_att=0.7;
ELEV_EHACT=tf([Wn_att^2],[1 2*zita_att*Wn_att Wn_att^2 ]);
```

Appendice D

D1

Di seguito è riportato lo script denominato "CAS_STVA" usato per trasformare il modello Simulink del C.A.S. in uno equivalente in variabili di stato, come descritto nel paragrafo 4.2.1. Sono riportato inoltre come esempio, le matrici ricavate per la condizione di volo definita da M=0.6.

```
%_____________________________________________________________
% SCRIPT USATO PER TRASFORMARE IL MODELLO DEL C.A.S IN VARIABILI DI STATO
%
%E'necessario inizializzarlo col numero di Mach.I valori accettati sono:
%M=0.45; M=0.6; M=0.84;
%
% Richiama:
%1)La function '[aereo,ALON,BLON,CLON,DLON,K_fwd]=var_stato_wq(M)'
%2)Lo script "sensori"
%3)Lo script "attuatore"
%4)Il modello Simulink "actuator"
%5)Il modello Simulink "sensori_aqnznf"
%6)Il modello Simulink "compensatore"
%_____________________________________________________________________

%"var_stato_w" costruisce il modello in variabili di stato "aereo"
[aereo,ALON,BLON,CLON,DLON,K_fwd]=var_stato_wq(M);
sensori;     %richiama la script che costruisce la fdt dei sensori
attuatore;   %richiama la script che costruisce la fdt degli attuatori
%_____________________________________________________________________

% ---------------------------------------------------------------------
% PASSAGGIO DAL MODELLO SYMULINK DELL'ATTUATORE ALLA SUA DESCRIZIONE IN
% VARABILI DI STATO

[Aact,Bact,Cact,Dact]=linmod2('actuator');
 % --------------------------------------------------------------------
% COSTRUZIONE DELLE MATRICI DI STATO A,B,C,D DEL SISTEMA AEREO+ATTUATORE

%C OSTRUZIONE DELLA MATRICE A
[n,m]=size(ALON);
A2=vertcat(BLON(:,1)*Cact,Aact);
[n1,m1]=size(A2);
A1=vertcat(ALON,zeros(n1-n,m));
A=horzcat(A1,A2);

% COSTRUZIONE DELLA MATRICE B
B=vertcat(BLON(:,1)*Dact,Bact);

% COSTRUZIONE DELLA MATRICE  C
C2=[ DLON(:,1)*Cact;Cact ];

[n2,m2]=size(Cact);
C1=[CLON;zeros(n2,n)];
C=horzcat(C1,C2);
```

```
Cprov=zeros(3,4);
Cprov(1,:)=C(1,:);
Cprov(2,:)=C(3,:);
Cprov(3,:)=C(4,:);
%COSTRUZIONE DELLA MATRICE D
D=vertcat(DLON(:,1)*Dact,Dact);


%%-------------------------------------------------------------------

% PASSAGGIO DAL MODELLO SYMULINK "sensori_aqnznf" ALLA SUA DESCRIZIONE
% IN VARABILI DI STATO

[As1,Bs1,Cs1,Ds1]=linmod2('sensori_aqnznf');
%-------------------------------------------------------------------
% Si indica con PLANT il sistema velivolo+attuatore+sensori_aqnznf di
% seguito si esegue la realizzazione in variabili di stato
% del sistema PLANT. Il pedice p sta appunto per PLANT
%
%COSTRUZIONE DELLE MATRICI Ap, Bp, Cp
[n,m]=size(A);
[ns1,ms1]=size(As1);
Ap1=vertcat(A,Bs1*Cprov);
Ap2=vertcat(zeros(n,ms1),As1);
Ap=horzcat(Ap1,Ap2);

[nb1,mb1]=size(B);
[na1,ma1]=size(As1);
[nc1,mc1]=size(Cs1);

Bp=vertcat(B,zeros(na1,mb1));
Cp=horzcat(zeros(3,4),Cs1);

%-------------------------------------------------------------------
% RICAVO LE MATRICI DI STATO DEL COMPENSATORE: F =0;G =1;Dc=1;J =0;
[F,G,Dc,J]=linmod2('compensatore');
%-------------------------------------------------------------------
%%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
% DEFINISCO LE MATRICI DI STATO DI TUTTO IL SISTEMA: PLANT+COMPENSATORE

% COSTRUZIONE DELLA MATRICA Apc
[np,mp]=size(Ap);
Apc=horzcat(vertcat(Ap,-G*Cp(1,:)),vertcat(zeros(np,1),F));
[nGH,mGH]=size(G*Cp(1,:));
[np,mp]=size(Bp);

% COSTRUZIONE DELLA MATRICA Bpc
Bpc=vertcat(Bp,zeros(mp,nGH));

% COSTRUZIONE DELLA MATRICA Cpc
[nc,mc]=size(Cp(2:end,:));
Cpc=horzcat(vertcat(Cp(2:end,:),-J*Cp(1,:)),vertcat(zeros(nc,1),Dc));

% COSTRUZIONE DELLA MATRICA Gpc
Gpc=vertcat(zeros(np,1),G);
Gpc=K_fwd*Bpc+Gpc;

% COSTRUZIONE DELLA MATRICA Fpc
Fpc=vertcat(zeros(nc,1),J);
```

```
% COSTRUZIONE DELLA MATRICA Hpc
Hpc=horzcat(Cp(1,:),zeros(mp,nGH));
%%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
```

D1

A=

Blocco velivolo-attuatore				Blocco sens_nz						Blocco sens_q						Blocco sens_α					Compensatore
-0,9629	180,1	0	-157,18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0,07696	-1,367	0	-169,78	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-44,8	-1024	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0,09819	-0,2351	0	-16,026	-60,2	-1849	0	0	0	400	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1849	-160	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-1849	320	-160	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1849	-320	320	-320	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,09819	0,2351	0	16,026	0	0	0	0	0	-200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-57,3	0	0	0	0	0	0	0	0	-60,2	-1849	0	0	0	400	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1849	-160	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1849	320	-160	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1849	-320	320	-320	0	0	0	0	0	0	0
0	57,3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-200	0	0	0	0	0	0
-0,314	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-46,2	-1089	0	0	400	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1089	-80	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1089	160	-320	0	0
0,314	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-200	0
0	0	0	0	0	1849	-320	320	-640	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

C=

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1849	320	-320	640	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1089	-160	640	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

X=

$\propto$	Stati del sistema velivolo-attuatore
q	
δ_e	
$\dot{\delta}_e$	
X5	Stati del blocco Sens_nz
X6	
X7	
X8	
X9	
X10	
X11	Stati del blocco Sens_q
X12	
X13	
X14	
X15	
X16	
X17	Stati del blocco sens_α
X18	
X19	
X20	
X21	
ε	

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1849 & 320 & -320 & 640 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$Q = \begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 100000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3418801 & -591680 & 591680 & -1183360 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -591680 & 102400 & -102400 & 204800 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 591680 & -102400 & 102400 & -204800 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1183360 & 204800 & -204800 & 409600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10
\end{vmatrix}
\qquad
B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}
\qquad
G = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,91 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}
\qquad
F = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Appendice E

E1 requisiti

"requisiti"

Questo script esegue le verifiche secondo i criteri esposti nel capitolo 3.

```
%%=====================    VERIFICA SU    q(t)    ==================
t0=0;
t1=9;
t2=11;
M=0.45;
Quota=29300; %%ft

%%_________________________________
%% Valore massimo
format short g
[Qmax,index_tqmax]=max(q);
tqmax=time(index_tqmax);
%%_________________________________

%%_________________________________
%% Valore di regime
indqcost=find(time>t1 & time<t2);
nn=length(indqcost);
Qss=sum(q(indqcost))/nn;
qcost=Qss*ones(1,nn);
%%_________________________________
figure(1)
format short g
axis([-1 time(end) -Qmax+3 Qmax+1]);
xlabel('Time [s]');
ylabel('q [grad/s]');
title('VERIFICA SU Q(t)');

str={'CONDIZIONE DI VOLO:',sprintf('M=%g',M ),...
    sprintf('Quota in ft= %g ',Quota)};
annotation('textbox',[.45 0.8 0.15 0.099],...
    'String',str,'BackgroundColor',[1 1 1]);

text(tqmax,Qmax+0.1,sprintf('Q_m_a_x= %f ',Qmax ),...
     'HorizontalAlignment','left');
text((t1+t2)/2-2,Qss+0.15,sprintf('Q_s_s= %f ',Qss ),...
     'HorizontalAlignment','left');
hold on
plot(max(q)*ones(1,length(q)),'r--');
plot(time,q,'LineWidth',1);          %% Funzione q(t)
plot(tqmax,Qmax,'.');                %% Massimo
P1=[tqmax,tqmax]';
P2=[0,Qmax]';
plot(P1,P2,'r --');
%%_________________________________
P3=[t0,tqmax]';                      %% Tempo al picco
P4=[Qmax/8,Qmax/8]';
plot(P3,P4,'r --');
text(1.2*tqmax,Qmax/8,sprintf('t_Q= %f ',tqmax),...
     'HorizontalAlignment','left');
```

```
%%Riferimento ausiliare
OY1=[t0,t0];
OY2=[0,Qmax+2];
plot(OY1,OY2,'LineWidth',1.5); %%Asse Y ausiliare
OX1=[t0,t0];
OX2=[t0,time(end)];
plot(OX2,OX1,'LineWidth',1.5); %%Asse X ausiliare

grid on
disp('-------------------------------------------------------')
disp('')
disp('Verifica su q(t) ');
 Qmax_Qss=Qmax/Qss;
 if Qmax/Qss <=2.25 && tqmax>0.5 && tqmax<1.1
% %    CONDIZIONE DI VOLO:','','M=0.6','','Quota=29300 ft
disp('Verifica su q(t) superata');
str={'LA VERIFICA E''' 'STATA SUPERATA ',...
     '---------------',...
     'VALORI DA SPECIFICA:','',...
     '(Q_m_a_x/Q_s_s) < 2.25 ','',' 0.5 < t_Q < 1.1',...
     '---------------',...
     'VALORI OTTENUTI:','',...
     sprintf('Q_m_a_x/Q_s_s = %f',Qmax/Qss),'',...
     sprintf('t_Q = %f',tqmax) };

     annotation('textbox',[.683 0.35 0.15 0.43],'String',...
         str,'BackgroundColor',[1 1 1]);


disp(sprintf('Yes! Qmax/Qss<=2.25 ---> Qmax/Qss= %d',Qmax/Qss));
 else
     disp('No!  Verifica su q(t) non superata');
     str={'LA VERIFICA NON E'''' STATA SUPERATA',...
     '---------------',...
     'VALORI DA SPECIFICA:','',...
     '(Q_m_a_x/Q_s_s) < 2.25 ','',' 0.5 < t_Q < 1.1',...
     '---------------',...
     'VALORI OTTENUTI:','',...
     sprintf('Q_m_a_x/Q_s_s = %f',Qmax/Qss),'',...
     sprintf('t_Q = %f',tqmax) };

     annotation('textbox',[.683 0.35 0.15 0.43],'String',...
         str,'BackgroundColor',[1 1 1]);

disp(sprintf('Qmax/Qss>2.25 ---> Qmax/Qss= %d',Qmax/Qss))
disp(sprintf('0.5 < t_Q < 1.1 ---> t_Q= %d',tqmax))


 end
 disp('-------------------------------------------------------')
 disp('')

%%=============== fine verifica su q(t)=====================


%%==========================================================
%%=================== VERIFICA SU Q_dot(t)    ==============

[Q_dot_max,index_tq_dot_max]=max(q_dot);
% Q_dot_max=Q_dot_max;
```

```
tq_dot_max=time(index_tq_dot_max);

figure(2)
tend=length(time);
axis([-0.5 time(tend)-16 -Q_dot_max+10 Q_dot_max+1]);
xlabel('Time [s]')
ylabel('q_d_o_t [grad/s^2]');
title('VERIFICA SU Q_d_o_t(t)');
str={'CONDIZIONE DI VOLO:',sprintf('M=%g',M ),...
    sprintf('Quota in ft= %g ',Quota)};
annotation('textbox',[.45 0.8 0.15 0.099],'String',...
    str,'BackgroundColor',[1 1 1]);
hold on
%%Riferimento ausiliare
OY1=[t0,t0];
OY2=[0,Q_dot_max+2];
plot(OY1,OY2,'LineWidth',1.5); %%Asse Y ausiliare
OX1=[t0,t0];
OX2=[t0,time(end)];
plot(OX2,OX1,'LineWidth',1.5); %%Asse X ausiliare
%%_________________
P5=[t0,tq_dot_max]';          %% Tempo al picco
P6=[-Q_dot_max/5,-Q_dot_max/5]';
plot(P5,P6,'r --');
text(tq_dot_max+0.1,-Q_dot_max/5, sprintf('t_Q_d_o_t= %f ',...
    tq_dot_max),'HorizontalAlignment','left');
P7=[t0,t0];
P8=[0,-3.5];
plot(P7,P8,'r --');
P7=[tq_dot_max,tq_dot_max];
P8=[0,-3.5];
plot(P7,P8,'r --');
P7=[tq_dot_max,tq_dot_max]';
P8=[0,Q_dot_max]';
plot(P7,P8,'r --');
%%_________________
plot(time,q_dot);
plot(tq_dot_max,Q_dot_max,'.');
text(tq_dot_max+0.01,Q_dot_max,...
    sprintf('Q_d_o_t_m_a_x= %f ',Q_dot_max),...
    'HorizontalAlignment','left');

 grid on
check1=0;
check2=0;
disp('Verifica su q_d_o_t(t) ');
   if  Q_dot_max<20
      check1=1;
disp(sprintf('Yes!Design
Target rispettato;Q_d_o_t_max<20 Q_dot_max= %f',Q_dot_max ));

   elseif  Q_dot_max<40
    check1=1;
    disp(sprintf('Yes! Q_dot_max<40  Q_dot_max= %f',Q_dot_max ));
   else
    disp(sprintf('No! Q_dot_max>40  Q_dot_max= %f',Q_dot_max ));
    check1=0;
   end

   if  tq_dot_max<0.18
```

```
      check2=1;
disp(sprintf('Yes! tq_dot_max<0.18  tq_dot_max= %f',tq_dot_max ));

   else
       check2=0;
disp(sprintf(' No! tq_dot_max>0.18 tq_dot_max= %f ',tq_dot_max ));

   end
disp('-------------------------------------------------------')
disp('')
 if check1==1 && check2==1

     str1={'LA VERIFICA E'' STATA SUPERATA','',...
     '---------------',...
     'VALORI DA SPECIFICA:','',...
     'Q_d_o_t_m_a_x<40 ','',' t_Q_d_o_t_m_a_x<0.18',...
     '---------------',...
     'VALORI OTTENUTI:','',...
     sprintf('Q_d_o_t_m_a_x = %f',Q_dot_max),...
     '',sprintf('t_Q_d_o_t = %f',tq_dot_max) };

annotation('textbox',[0.646 0.32 0.24 0.47],...
    'String',str1,'BackgroundColor',[1 1 1]);
 else
     if check1==1 && check2==0
         str1={'LA VERIFICA NON E'' STATA SUPERATA','',...
               'PERCHE''   t_Q_d_o_t_m_a_x>0.18','',...
               '---------------',...
               'VALORI DA SPECIFICA:','',...
               'Q_d_o_t_m_a_x<20 ','',' t_Q_d_o_t_m_a_x<0.18',...
               '---------------',...
               'VALORI OTTENUTI:','',...
               sprintf('Q_d_o_t_m_a_x = %f',Q_dot_max),...
               '',sprintf('t_Q_d_o_t = %f',tq_dot_max) };
               annotation('textbox',[0.646 0.32 0.24 0.47],...
                   'String',str1,'BackgroundColor',[1 1 1]);

     else
         if check1==0 && check2==1

           str1={'LA VERIFICA NON E'' STATA SUPERATA','',...
               'PERCHE''   Q_d_o_t_m_a_x>20','',...
               '---------------',...
               'VALORI DA SPECIFICA:','',...
               'Q_d_o_t_m_a_x<20 ','',' t_Q_d_o_t_m_a_x<0.18',...
               '---------------',...
               'VALORI OTTENUTI:','',...
               sprintf('Q_d_o_t_m_a_x = %f',Q_dot_max),'',...
               sprintf('t_Q_d_o_t = %f',tq_dot_max) };
               annotation('textbox',[0.646 0.32 0.24 0.47],...
                   'String',str1,'BackgroundColor',[1 1 1]);
         else
    str1={'LA VERIFICA NON E'' STATA SUPERATA','',...
    'PERCHE''    Q_d_o_t_m_a_x>20  & ... t_Q_d_o_t_m_a_x>0.18',...
    '','---------------',...
    'VALORI DA SPECIFICA:','',...
    'Q_d_o_t_m_a_x<20 ','',' t_Q_d_o_t_m_a_x<0.18',...
    '---------------',...
    'VALORI OTTENUTI:','',...
               sprintf('Q_d_o_t_m_a_x = %f',Q_dot_max),...
```

```
                '',sprintf('t_Q_d_o_t = %f',tq_dot_max) };
                annotation('textbox',[0.646 0.32 0.24 0.47],...
                    'String',str1,'BackgroundColor',[1 1 1]);
        end

    end

 end


%%%=============== VERIFICA  dropback SU THETA =================

 figure(3)

[Dtheta,tstar,Theta_dbQ,Theta_max,t_picco,Theta_db]=...
    Copydropback(teta,time,7,t0,t1,t2);
Theta_dbQ=-Theta_dbQ;
 xlabel('Time [s]');
 ylabel('Theta [grad]');
 title('VERIFICA SU \theta(t)');
 str={'CONDIZIONE DI VOLO:',sprintf('M=%g',M ),...
     sprintf('Quota in ft= %g ',Quota)};
 annotation('textbox',[.45 0.8 0.15 0.099],'String',...
     str,'BackgroundColor',[1 1 1]);

text(0.1,-4,sprintf('Theta_d_b/Q=%f',Theta_dbQ),...
     'HorizontalAlignment','left');
text(t_picco-0.5,Theta_max+1,sprintf('Theta_m_a_x= %f',...
    Theta_max),'HorizontalAlignment','left');
text(t_picco+3,teta(end)-1,sprintf('Theta_s_s= %f',...
    teta(end)),'HorizontalAlignment','left');
text(t_picco+3,teta(end)-1,sprintf('Theta_s_s= %f',...
    teta(end)),'HorizontalAlignment','left');



    if  Theta_dbQ>-0.25 &&  Theta_dbQ<0.8
     str={'LA VERIFICA E''' 'STATA SUPERATA ',...
     '---------------',...
     'VALORI DA SPECIFICA:','',...
     ' -0.25 < Theta_d_b_Q < 0.8',...
     '---------------',...
     'VALORI OTTENUTI:','',...
     sprintf('Theta_d_b_Q = %f',Theta_dbQ) };
     annotation('textbox',[.683 0.35 0.15 0.3],...
         'String',str,'BackgroundColor',[1 1 1]);

disp(sprintf('Yes! -0.25<Theta_d_b/Q<0.8  Theta_d_b/Q= %d',...
    Theta_dbQ));
      check=1;
    else
      str={'LA VERIFICA NON E''' 'STATA SUPERATA ',...
     '---------------',...
     'VALORI DA SPECIFICA:','',...
     ' -0.25 < Theta_d_b_Q < 0.8',...
     '---------------',...
     'VALORI OTTENUTI:','',...
     sprintf('Theta_d_b_Q = %f',Theta_dbQ) };
     annotation('textbox',[.683 0.35 0.15 0.3],...
         'String',str,'BackgroundColor',[1 1 1]);
```

```
disp(sprintf('No! Theta_d_b/Q è fuori dai limiti Theta_d_b/Q= %d',...
    Theta_dbQ));
      check=0;
    end
    %%___ Assi Figura ______
axis([(tstar-1) (max(time)-3) (min(teta)-7) (max(teta)+5)]);

%%%==============================================================
%%%========= VERIFICA  FLIGHT PATH TIME DELAY SU GAMMA ==========
figure(4)
 xlabel('Time [s]');
 ylabel('\gamma(t) [grad]');
 title('VERIFICA SU \gamma(t)');
 str={'CONDIZIONE DI VOLO:',sprintf('M=%g',M ),...
     sprintf('Quota in ft= %g ',Quota)};
 annotation('textbox',[.45 0.8 0.15 0.099],'String',...
     str,'BackgroundColor',[1 1 1]);

[Dgamma,tsar,t_gamma,t_gamma_max,t_picco,gamma_regime]=...
    Copydropback(gamma,time,7,10^(-5),12,14);

%%___ Assi Figura ______
axis([(tstar-3) max(time) (min(gamma)-7) (max(gamma)+5)]);


text(1,-4,sprintf('T_g_a_m_m_a=%f',t_gamma),...
     'HorizontalAlignment','left');
text((t1+t2+8)/2,gamma_regime-1,sprintf('gamma=%f',gamma_regime),...
      'HorizontalAlignment','left');
```

E2 sched

"sched"

```
%% MATRICI DEI GUADAGI AL VARIARE DEL MACH
K045=[0.5688   0.4952   14.3111 ];
K06=[0.3798   0.1310    8.1454]; %%%[Kq Ka Ki]
K084=[0.2129    -0.1347    3.8710];

%% Separo i guadagni dei diversi loop
Ka=[K045(2) K06(2) K084(2)];
Ki=[K045(3) K06(3) K084(3)];
Kq=[K045(1) K06(1) K084(1)];
%%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
%%%PRESSIONE DINAMICA NELLE CONDIZIONI DI RIFERIMENTO
ft=0.3048;      % conversione da feet a m
h=29300*ft; %%feet
[a] =IntStandAir_SI(h,'a');
[ro]=IntStandAir_SI(h,'rho');
%%%---------------------------------
M045=0.45;
```

```
U045=(a*M045);
Q045=0.5*ro*U045^2;
K_fwd045=Kfwd(M045);
%%%--------------------------------
M06=0.6;
U06=(a*M06);
Q06=0.5*ro*U06^2;
K_fwd06=Kfwd(M06);
%%%--------------------------------
M084=0.84;
U084=(a*M084);
Q084=0.5*ro*U084^2;
K_fwd084=Kfwd(M084);
%%%--------------------------------
%% GUADAGNO DEL RAMO FWD
kfwd=[K_fwd045,K_fwd06,K_fwd084];

%% VETTORE DELLA PRESSIONE DINAMICA
Qv=[Q045 Q06 Q084 ];
p=0.1;
Q1=4000:p:Q045; Q2=Q045:p:Q06; Q3=Q06:p:Q084; Q4=Q084:p:Q084+1000;
Q=horzcat(Q1,Q2,Q3,Q4);
indQ045=find(Q==(Qv(1)));
indQ06=find(Q==(Qv(2)));
indQ084=find(Q==(Qv(3)));


%%%%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
%%%ANDAMENTO DEI GUADAGNI CON LA PRESSIONE DINAMICA

%%-----------------------------------------------------
%%POLINOMIO DI II GRADO CHE DESCRIVE Kq IN FUNZIONE DELLA PRESSIONE
%%DINAMICA
coef_kq=polyfit(Qv,Kq,2);
kq=polyval(coef_kq,Q);
%%-----------------------------------------------------
%%POLINOMIO DI II GRADO CHE DESCRIVE Kq IN FUNZIONE DELLA PRESSIONE
%%DINAMICA
coef_ka=polyfit(Qv,Ka,2);
ka=polyval(coef_ka,Q);
%%-----------------------------------------------------
%%POLINOMIO DI II GRADO CHE DESCRIVE Kq IN FUNZIONE DELLA PRESSIONE
%%DINAMICA
coef_ki=polyfit(Qv,Ki,2);
ki=polyval(coef_ki,Q);
%%-----------------------------------------------------
%%POLINOMIO DI II GRADO CHE DESCRIVE Kq IN FUNZIONE DELLA PRESSIONE
%%DINAMICA
coef_kfwd=polyfit(Qv,kfwd,2);
k_fwd=polyval(coef_kfwd,Q);
%%-----------------------------------------------------

figure(1001)
hold on
%%Plot Kq
plot(Qv,Kq,'*',Q,kq,'LineWidth',1)
plot(Qv,Ka,'*',Q,ka,'LineWidth',1)
str={sprintf('M=0.6'), sprintf('K_q= %f ',K06(1))};
text(Qv(2)+100,K06(1)+0.05,str)
str={sprintf('M=0.84'),sprintf('K_q= %f ',K084(1))};
```

```
text(Qv(3),K084(1)+0.05,str)
str={sprintf('M=0.45'),sprintf('K_q= %f ',K045(1))};
text(Qv(1)+100,K045(1)+0.05,str);
%%Plot Kalfa
str={sprintf('M=0.6'),sprintf('K_a_l_p_h_a= %f ',K06(2))};
text(Qv(2)+100,K06(2)+0.02,str)
str={sprintf('M=0.84'),sprintf('K_a_l_p_h_a= %f ',K084(2))};
text(Qv(3),K084(2)-0.05,str)
str={sprintf('M=0.45'),sprintf('K_a_l_p_h_a= %f ',K045(2))};
text(Qv(1)-1000,K045(2)-0.04,str);
axis([3000 18000 -0.50 0.8])
title('TREND DEI GUADAGNI K_q e K_\alpha IN FUNZIONE DELLA PRESSIONE
DINAMICA')
xlabel('Pressione dinamica 0.5*ro*U^2  [Pa]');
ylabel('K_\alpha & K_q');
grid on
%%%Andamento di Ki con la pressione dinamica
figure(1002)
 hold on
plot(Qv,Ki,'*',Q,ki)
str={sprintf('M=0.6'),sprintf('K_i= %f ',K06(3))};
text(Qv(2)+150,K06(3)+0.15,str)
str={sprintf('M=0.84'),sprintf('K_i= %f ',K084(3))};
text(Qv(3),K084(3)-0.6,str)
str={sprintf('M=0.45'),sprintf('K_i= %f ',K045(3))};
text(Qv(1)+150,K045(3)+0.11,str);
% axis([3000 18000 0 15])
title('TREND DEI GUADAGNI K_i IN FUNZIONE DELLA PRESSIONE DINAMICA')
xlabel('Pressione dinamica 0.5*ro*U^2  [Pa]');
ylabel('K_i');
grid on
%%%Andamento di K_fwd con la pressione dinamica
% figure(1003)
plot(Qv,kfwd,'*',Q,k_fwd)
str={sprintf('M=0.6'),sprintf('K_f_w_d= %f ',K_fwd06)};
text(Qv(2)+150,K_fwd06-0.05,str)
str={sprintf('M=0.84'),sprintf('K_f_w_d= %f ',K_fwd084)};
text(Qv(3),K_fwd084-0.1,str)
str={sprintf('M=0.45'),sprintf('K_f_w_d= %f ',K_fwd045)};
text(Qv(1)+100,K_fwd045-0.05,str);
axis([3000 18000 -3 16])
title('TREND DEI GUADAGNI K_f_w_d IN FUNZIONE DELLA PRESSIONE DINAMICA')
xlabel('Pressione dinamica 0.5*ro*U^2  [Pa]');
ylabel('K_f_w_d');
grid on
%%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
%%%ANDAMENTO DEI GUADAGNI CON L'INVERSO DELLA PRESSIONE DINAMICA

%%%-------------------------------------------------------------
 unosuQ=sort(1./Q);
 for i=1:3
  qv(i)=(1./Qv(i));

  Kq1suQ(i,1)=qv(i);
  Kq1suQ(i,2)=Kq(i);

  Ka1suQ(i,1)=qv(i);
  Ka1suQ(i,2)=Ka(i);

  Ki1suQ(i,1)=qv(i);
```

```
  Ki1suQ(i,2)=Ki(i);

  Kkfwd1suQ(i,1)=qv(i);
  Kkfwd1suQ(i,2)=kfwd(i);
 end

indQ045=find(unosuQ==(qv(1)));
indQ06=find(unosuQ==(qv(2)));
indQ084=find(unosuQ==(qv(3)));
index=[indQ045,indQ06,indQ084];


%%% Approssimazione con polinomio di II grado
a1 = polyfit(Ka1suQ(:,1),Ka1suQ(:,2),2);
aparab=polyval(a1,unosuQ);
%%% Retta
a = polyfit(Ka1suQ(:,1),Ka1suQ(:,2),1);
retta_a = polyval(a,unosuQ);

%%-------------------------------------------------------------
%%%Kq Approssimazione con polinomio di II grado
p1=polyfit(Kq1suQ(:,1),Kq1suQ(:,2),2);
par_q=polyval(p1,unosuQ);
%%%Kq Retta
p=polyfit(Kq1suQ(:,1),Kq1suQ(:,2),1);
retta_q=polyval(p,unosuQ);
%%-------------------------------------------------------------

%%% Approssimazione con polinomio di II grado
ii1 = polyfit(Ki1suQ(:,1),Ki1suQ(:,2),2);
iparab=polyval(ii1,unosuQ);
%%% Retta
ii= polyfit(Ki1suQ(:,1),Ki1suQ(:,2),1);
retta_i = polyval(ii,unosuQ);
%%-------------------------------------------------------------
%%-------------------------------------------------------------

%%% Approssimazione con polinomio di II grado
kfwd1 = polyfit(Kkfwd1suQ(:,1),Kkfwd1suQ(:,2),2);
kfwdparab=polyval(kfwd1,unosuQ);
%%% Retta
kfwd= polyfit(Kkfwd1suQ(:,1),Kkfwd1suQ(:,2),1);
retta_kfwd = polyval(kfwd,unosuQ);
%%-------------------------------------------------------------

Kqap=[retta_q(indQ045),retta_q(indQ06),retta_q(indQ084)];
Kaap=[retta_a(indQ045),retta_a(indQ06),retta_a(indQ084)];
Kiap=[retta_i(indQ045),retta_i(indQ06),retta_i(indQ084)];

Kap045=[Kqap(1),Kaap(1),Kiap(1)];
Kap06=[Kqap(2),Kaap(2),Kiap(2)];
Kap084=[Kqap(3),Kaap(3),Kiap(3)];


 figure(102)
 hold on
 plot(Kq1suQ(:,1),Kq1suQ(:,2),'*')
 plot(unosuQ,par_q,'r-.')
 plot(unosuQ,retta_q)
 plot(unosuQ(index),retta_q(index),'.')
```

```
 str={sprintf('M=0.45'),sprintf('Kq_r= %f ',retta_q(indQ045))};
 text(unosuQ(indQ045),retta_q(indQ045)+0.03,str,...
     'HorizontalAlignment','right');
 str={sprintf('M=0.6'),sprintf('Kq_r= %f ',retta_q(indQ06))};
 text(unosuQ(indQ06),retta_q(indQ06)-0.03,str,...
     'HorizontalAlignment','left');
 str={sprintf('M=0.84'),sprintf('Kq_r= %f ',retta_q(indQ084))};
 text(unosuQ(indQ084)+0.1*10^(-4),...
     retta_q(indQ084)+0.03,str,'HorizontalAlignment','right');



 plot(Ka1suQ(:,1),Ka1suQ(:,2),'*')
 plot(unosuQ,aparab,'r-.')
 plot(unosuQ,retta_a)
 plot(unosuQ(index),retta_a(index),'.')

 str={sprintf('M=0.45'),sprintf('Ka_r= %f ',retta_a(indQ045))};
 text(unosuQ(indQ045)+0.15*10^(-4),retta_a(indQ045)-0.03,str,...
     'HorizontalAlignment','right');
 str={sprintf('M=0.6'),sprintf('Ka_r= %f ',retta_a(indQ06))};
 text(unosuQ(indQ06),retta_a(indQ06)-0.03,str,...
     'HorizontalAlignment','left');
 str={,sprintf('M=0.84'),sprintf('Ka_r= %f ',retta_a(indQ084))};
 text(unosuQ(indQ084)+0.1*10^(-4),retta_a(indQ084)-0.04,str,...
     'HorizontalAlignment','right');
axis([0.4*10^(-4) 2.7*10^(-4) -0.3 0.7])
title('TREND DEI GUADAGNI K_a_l_f_a e K_q IN FUNZIONE DEL RECIPROCO DELLA
PRESSIONE DINAMICA')
 xlabel('Reciproco della pressione dinamica 1/(0.5*ro*U^2) [1/(Pa)]');
 ylabel('K_a_l_f_a & K_q');
grid on
h = legend('guadagni K_q determinati con LQTOF','polinomio II grado',...
    'retta dei minimi quadrati',...
    'guadagni approssimati','Location','NorthWest');
%%%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
figure(106)
hold on
plot(Ki1suQ(:,1),Ki1suQ(:,2),'*')
plot(unosuQ,iparab,'r-.')
plot(unosuQ,retta_i)
plot(unosuQ(index),retta_i(index),'.')
str={'M=0.45',sprintf('Ki= %f', retta_i(indQ045))};
text(unosuQ(indQ045),retta_i(indQ045)+0.5,...
    str,'HorizontalAlignment','right');
str={'M=0.6',sprintf('Ki= %f', retta_i(indQ06))};
text(unosuQ(indQ06),retta_i(indQ06)-1,str,...
    'HorizontalAlignment','left');
str={'M=0.84',sprintf('Ki= %f', retta_i(indQ084))};
text(unosuQ(indQ084)+0.1*10^(-4),retta_i(indQ084)+1,str,...
    'HorizontalAlignment','right');
h = legend('guadagni K_i determinati con LQTOF',...
    'polinomio II grado','retta dei minimi quadrati',...
    'guadagni approssimati','Location','NorthWest');
axis([0.4*10^(-4) 2.7*10^(-4) 2 16])
title('TREND DEI GUADAGNI K_i IN FUNZIONE DEL RECIPROCO DELLA PRESSIONE
DINAMICA')
xlabel('Reciproco della pressione dinamica 1/(0.5*ro*U^2) [1/(Pa)]');
ylabel('K_i');
grid on
```

```
figure(107)
hold on
plot(Kkfwd1suQ(:,1),Kkfwd1suQ(:,2),'*')
plot(unosuQ,kfwdparab,'r')
plot(unosuQ,retta_kfwd,'b-.')
plot(unosuQ(index),retta_kfwd(index),'.')
str={'M=0.45',sprintf('K_f_w_d= %f', retta_kfwd(indQ045))};
text(unosuQ(indQ045),retta_kfwd(indQ045)-0.08,...
    str,'HorizontalAlignment','right');
str={'M=0.6',sprintf('K_f_w_d= %f', retta_kfwd(indQ06))};
text(unosuQ(indQ06)-0.01*10^(-4),retta_kfwd(indQ06)+0.1,...
    str,'HorizontalAlignment','left');
str={'M=0.84',sprintf('K_f_w_d= %f', retta_kfwd(indQ084))};
text(unosuQ(indQ084)-0.01*10^(-4),retta_kfwd(indQ084)-0.08,...
    str,'HorizontalAlignment','right');
h = legend('guadagni K_f_w_d di riferimento','polinomio II grado',...
    'retta dei minimi quadrati',...
    'guadagni approssimati','Location','NorthOvest');
axis([0.4*10^(-4) 2.7*10^(-4) -2 0 ])
title('TREND DEI GUADAGNI K_f_w_d IN FUNZIONE DEL RECIPROCO DELLA
PRESSIONE DINAMICA')
xlabel('Reciproco della pressione dinamica 1/(0.5*ro*U^2) [1/(Pa)]');
ylabel('K_f_w_d');
grid on

savefile= 'sched_lin_K_unosuQ.mat';
Kalfa=retta_a;
Kq=retta_q;
Ki=retta_i;
K_fwd=retta_kfwd;
save(savefile,  'Kalfa', 'Kq','Ki','K_fwd','unosuQ')

savefile= 'sched_KvsQ.mat';
Kalfa=ka;
Kq=kq;
Ki=ki;
K_fwd=k_fwd;
save(savefile, 'Kalfa', 'Kq','Ki','K_fwd','Q')
```

E3 erpres

```
function [Kopt,K_fwd]=erpres(M,e)
load sched_KvsQ

%%%PRESSIONE DINAMICA NELLE CONDIZIONI DI RIFERIMENTO
ft=0.3048;      % conversione da feet a m
h=29300*ft; %%m
[a] =IntStandAir_SI(h,'a');
[ro]=IntStandAir_SI(h,'rho');
%% MATRICI DEI GUADAGI AL VARIARE DEL MACH

K045=[0.5688   0.4952   14.3111 ];
K06=[0.3798   0.1310    8.1454]; %%%[Kq Ka Ki]
K084=[0.2129    -0.1347    3.8710];


%% Separo i guadagni dei diversi loop
KA=[K045(2) K06(2) K084(2)];
KI=[K045(3) K06(3) K084(3)];
KQ=[K045(1) K06(1) K084(1)];
% KFWD=[Kfwd(0.45),Kfwd(0.6),Kfwd(0.84)];
%%%---------------------------------

M=num2str(M);
switch M
    %[Kq Ka Ki]
   case {'0.45'}
    M=0.45;
    K=K045; %%% K  per M=0.45
    U=(a*M);
    Qrif=0.5*ro*U^2;
    K_fwd_rif=Kfwd(M);
     i_q=0.08;
     i_a=-0.08;
     Dx=-0.1*10^(4);
   case '0.6'
    M=0.6;
    K=K06; %% Kper M=0.6
    U=(a*M);
    Qrif=0.5*ro*U^2;
     K_fwd_rif=Kfwd(M);
     i_q=0.1;
     i_a=-0.1;
     Dx=-0.1*10^(4);;
   case '0.84'
    M=0.84;
    K=K084;%% Kper M=0.84
    U=(a*M);
    Qrif=0.5*ro*U^2;
    K_fwd_rif=Kfwd(M);
    i_q=0.05;
     i_a=-0.05;
     Dx=+0.01*10^(4);
   otherwise
      disp('M non valido, settare M=0.45, M=0.6 o  M=0.84')
end

 DQmax=0.5*10^3; %% [Pa]
```

```
 emax= DQmax/Qrif;

 DQ=Qrif*emax*e/100;
 etot=emax*e;
 Qmis=Qrif+DQ;

 DU=sqrt(abs(DQ)/0.5*ro);
 if e>0
 U_mis=U+DU;
 else
  U_mis=U-DU;
 end
 M_mis= U_mis/a;

 QMIS=ones(1,length(Q))*Qmis;
 deltaQ=abs(Q-QMIS);
 [Qmin,ind]=min(deltaQ);

 K_fwd_visto=K_fwd(ind);
 Kq_visto=Kq(ind);
 Ka_visto=Kalfa(ind);
 Ki_visto=Ki(ind);


 figure(1)
  hold on
plot(Q(ind),Kq_visto,'o')
str={sprintf('M_m_i_s=%f ',M_mis),...
    sprintf('Kq_v_i_s_t_o= %f ',Kq_visto)};
text(Q(ind),Kq_visto+i_q,str)
plot(Qrif,K(1),'*')
h =legend('guadagni K_q e K_a assunti per errore sulla pressione',...
    sprintf('guadagni ottimi M=%f ',M));

plot(Q(ind),Ka_visto,'o')
str={sprintf('M_m_i_s=%f ',M_mis),...
    sprintf('Ka_v_i_s_t_o= %f ',Ka_visto)};
text(Q(ind)+Dx,Ka_visto+i_a,str)
 plot(Q,Kq)
 plot(Q,Kalfa)
 plot(Qrif,K(2),'*')
axis([3000 18000 -0.50 0.8])

title('TREND DEI GUADAGNI K_q e K_a_l_f_a IN FUNZIONE DELLA PRESSIONE
DINAMICA')
xlabel('Pressione dinamica 0.5*ro*U^2  [Pa]');
ylabel('K_a_l_f_a & K_q');

grid on


figure(2)
  hold on

 plot(Q(ind),K_fwd_visto,'o')
 str={sprintf('M_m_i_s=%f ',M_mis),...
     sprintf('Kfwd_v_i_s_t_o= %f ',K_fwd_visto)};
text(Q(ind),K_fwd_visto+0.8,str)
 plot(Qrif,K_fwd_rif,'*')
h =legend('guadagni K_i e K_f_w_d assunti per errore sulla pressione',...
```

```
    sprintf('guadagni ottimi M=%f ',M));
 plot(Q,K_fwd)
  plot(Q(ind),Ki_visto,'o')
str={sprintf('M_m_i_s=%f ',M_mis),...
    sprintf('Ki_v_i_s_t_o= %f ',Ki_visto)};
text(Q(ind),Ki_visto+0.4,str)
 plot(Q,Ki)
 plot(Qrif,K(3),'*')
title('TREND DEI GUADAGNI K_i e K_f_w_d IN FUNZIONE DELLA PRESSIONE
DINAMICA')
xlabel('Pressione dinamica 0.5*ro*U^2  [Pa]');
ylabel('K_i & K_f_w_d');
axis([3000 18000 -3 16])

grid on

Kopt=[-Kq_visto -Ka_visto Ki_visto];
K_fwd=K_fwd_visto;
```

Ringraziamenti

Ringrazio il Prof. Eugenio Denti per avermi pazientemente guidato in questo percorso, nonostante i sui numerosi impegni. Ringrazio inoltre il Prof. Giovanni Mengali per i preziosi consigli e l'attenzione che mi ha dimostrato.
Un sentito ringraziamento va al Dipartimento "Flight Technology" della "Piaggio Aero Industries" per avermi ospitato e dato la possibilità di affrontare questo lavoro, in particolare, esprimo enorme gratitudine all'Ing. Felice Felippone, per la grande disponibilità dimostrata.

. . . "non chi comincia, ma quel che persevera".

…A mio padre e mia madre, il cui solo pensiero già mi commuove…
Grazie per avermi insegnato il valore delle conquiste realizzate con l'onestà e il sudore della fronte. I vostri sacrifici diventano oggi, il mio futuro.
…Ai miei fratelli Luigi, Anna Maria e Alberto che per me sono un riferimento fisso, una certezza.
…Zia, ho mantenuto la promessa…

Grazie Caterina, per essere sempre al mio fianco pronta a sorreggermi, a spingere se arranco e a vivere con me le piccole gioie di tutti i giorni. A te devo molto, almeno una vita insieme.
Grazie alla tua famiglia, per l'affetto e il calore che mi dimostra costantemente.

Grazie a tutti gli amici che in questi anni hanno condiviso con me momenti di gioia e momenti di affanno. Sono tante le persone care a cui devo qualcosa, nominarle tutte sarebbe impossibile.
Non so se ha senso ringraziare un'aula studio… comunque, grazie "Pacinotti"!... mi hai regalato i momenti più belli, mi hai fatto incontrare le persone più care, mi hai fatto superare gli esami più duri… grazie.